

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 41.

1. Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkt des Wirkungsquantums; von P. Debye und A. Sommerfeld.

Inhalt: § 1. Einleitung und Allgemeines p. 873. — *I. Teil. Monochromatisches Licht* p. 881. § 2. Vollkommene Resonanz zwischen auf fallender Welle und Eigenschwingung p. 881. § 3. Unvollständige Resonanz p. 887. § 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie p. 890. § 5. Ergänzungen und Modifikationen p. 894. § 6. Einfluß der Dämpfung p. 898. — *II. Teil. Natürliches Licht* p. 903. § 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit p. 903. § 8. Die Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit p. 908. § 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale p. 914. § 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung p. 922.

§ 1. Einleitung und Allgemeines.

Während die Ausbreitung der elektromagnetischen Wirkungen in Raum und Zeit nach unserer Erfahrung durch die Maxwell'schen Gleichungen ihre vollkommene Darstellung findet, steht die heutige theoretische Physik vor ernsten Schwierigkeiten, wo es sich um die Erzeugung oder Absorption von Licht, die Erzeugung lichtelektrischer Wirkungen oder sekundärer Strahlungen handelt. Diese Schwierigkeiten haben sogar (in der Lichtquantenvorstellung) zu einer völligen Abkehr von der ursprünglichen Maxwell'schen Theorie und zu Konstruktionen geführt, die zwar die genannten Schwierigkeiten in glücklicher Weise heben, dafür aber auf anderen Gebieten — namentlich bei den fundamentalen Interferenzfragen — um so ernstere Schwierigkeiten schaffen.

In der Überzeugung, daß die Plancksche Entdeckung des universellen Wirkungsquantums dazu berufen ist, die augenblicklichen Leiden der theoretischen Physik zu heilen,

haben wir den typischen Vorgang der Energiekonzentration im lichtelektrischen Effekt vom Standpunkte des Wirkungsquantums genau diskutiert, anknüpfend an die Auffassung des Wirkungsquantums als einer gemeinsamen Eigenschaft aller reinen Molekularprozesse, emissiver oder absorptiver Art, die der eine von uns¹⁾ an einigen Beispielen zahlenmäßig begründet hat. Diese Auffassung wird hier — ganz im Anschluß an die Plancksche Nomenklatur des *Wirkungsquantums*²⁾ h und an eine wichtige Bemerkung in der Planckschen Dynamik bewegter Systeme³⁾ — für die Zwecke des lichtelektrischen Effektes folgendermaßen präzisiert:

Ein Atom häuft so lange auffallende Schwingungsenergie in der Bewegung seiner Elektronen auf, bis die Wirkungsgröße

$$\int (T - U) dt$$

den Betrag $h/2\pi$ erreicht hat; hier bedeutet, wie im Wirkungsprinzip der Mechanik, T die kinetische, U die potentielle Energie (hier die Energie der quasielastischen Bindung) des betrachteten Elektrons, h die Konstante des Strahlungsgesetzes. Ist die Wirkungsgröße $h/2\pi$ erstmalig erreicht, so wird das Elektron aus dem Atomverbande frei mit der gerade erreichten kinetischen Energie T .

Obwohl stark idealisierend in der Berücksichtigung nur eines der im Atom enthaltenen Elektronen und in der Annahme der quasielastischen Bindung scheint uns diese unsere Grundhypothese geeignet, einige wesentlichen Erscheinungen des lichtelektrischen Effektes wiederzugeben.

Natürlich ist unsere Grundhypothese aus der Maxwell'schen Elektrodynamik nicht zu folgern, sondern fügt ihr, ge-

1) A. Sommerfeld, Über die Struktur der γ -Strahlen, Sitzungsber. der Bayer. Akademie 1911. p. 1. §§ 4—6. Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik, Bericht für die Naturforscherversammlg. 1911 in Karlsruhe, Physik. Ztschr. 12. p. 1057, sowie Congrès Solvay, Brüssel 1911.

2) Im Gegensatz zum *Energiequantum*, das vermutlich nur eine aus dem Wirkungsquantum abgeleitete Bedeutung, und zwar nur für periodische Vorgänge, beanspruchen kann.

3) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsber. d. Preussischen Akademie 1907, vgl. insbesondere den Schluß von § 12.

wissermaßen als Definition des Atoms, etwas Fremdes hinzu. Sie unterscheidet sich aber in ihrem Verhältnis zur Elektrodynamik insofern von der Lichtquantentheorie, als sie mit der Elektrodynamik nirgends in Widerspruch tritt, vielmehr diese ergänzt bezüglich des Ablaufes solcher Prozesse, über die die Elektrodynamik von sich aus nichts weiß.

Um unsere Auffassung in vorläufiger Form zu charakterisieren, stellen wir sie den beiden bisher ausgebildeten Anschauungen von der Natur des lichtelektrischen Effektes gegenüber¹⁾: „der Vorstellung einer auf *Resonanzwirkung* beruhenden Auslösung der Elektronen durch die auffallende Strahlung, bei der die Elektronenenergie vor dem Auffallen der Strahlung bereits im Atom vorhanden ist (Lenard), und der *Lichtquantenhypothese*, bei der die Elektronenenergie der wirkenden Strahlung entstammt“ (Einstein).

Dem ersteren Standpunkt entsprechend betrachten auch wir einen Resonanzvorgang, bei dem das Elektron durch die elektrischen Kräfte der auffallenden Welle in Bewegung gesetzt wird, unter denselben einfachsten Bedingungen, die sich in der Dispersionstheorie bewährt haben. Dabei bestimmen wir aber die Dauer dieses Resonanzvorganges, die „Akkumulationszeit τ “, aus der obigen Hypothese des Wirkungsquantums; dieselbe wird um so länger ausfallen, je kleiner die auffallende Intensität ist. Hierdurch wird die Anhäufung einer Energiemenge ermöglicht, die unabhängig ist von der Intensität des Lichtes und von seiner Wirkungsdauer und die Größenordnung der beobachteten lichtelektrischen Energie hat. Wir brauchen also nicht auf die Energie des Atoms zurückzugreifen, sondern sehen als Quelle der lichtelektrischen Energie die primäre Strahlung an.

In dieser Hinsicht nähern wir uns also dem zweiten der genannten Standpunkte, ohne deshalb nötig zu haben, über die Struktur der Strahlung neue Voraussetzungen zu machen. Auch sonst stimmen unsere Resultate wesentlich mit denen

1) Wir zitieren hier R. Ladenburg, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 6. p. 476. 1909. Es sei bemerkt, daß Lenard für den lichtelektrischen Effekt in Gasen neuerdings ebenfalls annimmt, daß die Energie der primären Strahlung entstammt, vgl. C. Ramsauer, Physik. Zeitschr. 12. p. 998. 1911.

der Lichtquantenhypothese überein: Aus unserer Grundhypothese folgt nämlich Unabhängigkeit der lichtelektrischen Energie von der auffallenden Intensität, Abhängigkeit von der auffallenden Schwingungszahl ν gemäß dem *Einsteinschen Gesetz*¹⁾

$$T = h \nu;$$

und zwar gelten beide Aussagen bei uns strenge nur für den ausgezeichneten Fall der vollkommenen Resonanz zwischen der auffallenden (für diesen Fall als monochromatisch vorauszusetzenden) Schwingung und der Eigenschwingung des Elektrons. Im allgemeinen Fall läßt unsere Betrachtung die Möglichkeit von selektiven Materialeinflüssen vorhersehen (nicht nur bezüglich der Menge, sondern auch bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung der lichtelektrischen Elektronen), indem es bei uns außer auf die Schwingungszahl ν auch auf die Eigenschwingungszahl ν_0 des Elektrons wesentlich ankommt.

Den allgemeinen Gedanken unserer Hypothese zeigt die folgende Betrachtung, auf die wir uns später mehrfach beziehen werden:

Das Elektron sei durch eine quasielastische Kraft $-fx$ an seine Ruhelage ($x=0$) gebunden und werde aus dieser durch eine auffallende monochromatische Welle $\mathcal{E} = E \cos nt$ herausbewegt, deren elektrische Kraft die X -Richtung haben möge. Sehen wir von der Strahlungsdämpfung ab, so lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$m \ddot{x} + fx = e \mathcal{E} = e E \cos nt$$

und es wird seine kinetische und potentielle Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{f}{2} x^2.$$

Das Wirkungsintegral W formen wir mit Benutzung der Bewegungsgleichung in typischer Weise durch partielle Integration um:

1) Von der bei Einstein hinzutretenden Austrittsarbeit des Elektrons aus der Oberfläche des Metalles sehen wir ab, da sie nicht zu dem eigentlichen Prozeß der Befreiung des Elektrons aus dem Atom gehört.

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{\tau} (T - U) dt = \int_0^{\tau} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{f}{2} x^2 \right) dt \\
 &= \frac{m}{2} x \dot{x} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} x (m \ddot{x} + f x) dt = \frac{m}{2} x \dot{x} - \frac{e}{2} \int_0^{\tau} x \mathcal{E} dt.
 \end{aligned}$$

Der vom Integralzeichen befreite Term bezieht sich lediglich auf die Endzeit τ , da zur Anfangszeit Null Ruhe herrschen soll ($x = \dot{x} = 0$). Wir haben zu zeigen, daß dieser Term gleich ist der kinetischen Energie des Elektrons zur Zeit τ , geteilt durch dessen Eigenfrequenz n_0 .¹⁾

Man stelle sich zu dem Ende den zeitlichen Verlauf von W vor, wie er später in Fig. 1 für einen besonderen Fall skizziert wird, als eine oszillierende Kurve, deren Amplitude von Null an wächst. Soll W erstmalig den Wert $h/2\pi$ erreichen, so kann dies nur in der Nähe eines Maximums geschehen, weil anderenfalls schon in der vorangehenden Schwingung der Ordinatenwert $h/2\pi$ ebenfalls erreicht worden wäre. Wir haben also für unsere Akkumulationszeit τ :

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad T = U,$$

das heißt:

$$\dot{x}^2 = \frac{f}{m} x^2.$$

Nun bestimmt $\sqrt{f/m}$ die Eigenfrequenz n_0 der freien Schwingungen des Elektrons; also wird (vom Vorzeichen abgesehen, vgl. hierzu § 5):

$$\dot{x} = n_0 x \quad \text{und} \quad \frac{m}{2} x \dot{x} = \frac{1}{n_0} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{T}{n_0}$$

wie behauptet wurde. Indem wir noch in unserer Gleichung für das Wirkungsintegral $W = h/2\pi$ setzen, ergibt sich:

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{T}{n_0} - \frac{e}{2} \int_0^{\tau} x \mathcal{E} dt$$

1) Wir unterscheiden „Frequenz“ n und „Eigenfrequenz“ n_0 von „Schwingungszahl“ ν und „Eigenschwingungszahl“ ν_0 , wobei $n = 2\pi\nu$, $n_0 = 2\pi\nu_0$.

oder bei Einführung der Eigenschwingungszahl $\nu_0 = n_0/2\pi$:

$$(a) \quad T = \nu_0 h + \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt.$$

Würde man die Akkumulationszeit τ kennen, so ließe sich das Integral auf der rechten Seite ausrechnen; dann würde unsere Gleichung (a) direkt die Energie T des lichtelektrischen Elektrons liefern. In Wirklichkeit müssen wir aber diese Gleichung zunächst als Bestimmungsgleichung für die Akkumulationszeit ansehen und zu dem Zwecke für T seinen Wert zur Zeit τ anderweitig berechnen. Hierbei wird sich der folgende Kunstgriff vielfach als nützlich erweisen.

Es ist für $t = \tau$ wie bemerkt:

$$T = U = \frac{1}{2}(T + U).$$

Nun ist die Gesamtenergie $T + U$ des Elektrons eine mit der Zeit langsam veränderliche Größe, die durch ihren Mittelwert während einer Schwingung ersetzt werden darf. Dieser Mittelwert ist zugleich gleich dem doppelten Mittelwerte der kinetischen oder der potentiellen Energie. Bezeichnen wir die Mittelbildung für eine Schwingungsdauer in der Nähe der Zeit τ durch Überstreichen, so wird also

$$(b) \quad T = \frac{1}{2}(\overline{T + U}) = \bar{U} = \frac{f}{2} \overline{x^2} = n_0^2 \frac{m}{2} \overline{x^2}.$$

Indem wir diesen Wert von T in (a) einsetzen, haben wir die gewünschte Bestimmungsgleichung von τ ; τ kommt dann in (a) sowohl linkerhand in dem Faktor $\overline{x^2}$, wie rechterhand in dem Zeitintegral vor. Ist τ auf solche Weise gefunden, so entnimmt man die Energie des lichtelektrischen Elektrons direkt aus (b).

Die Untersuchung des in (a) noch verbleibenden Integrals, einer Art „Zeitvirial“, sowie des in (b) auftretenden Mittelwertes, deren Berechnung verschieden ausfällt, je nachdem wir vollkommene oder nicht vollkommene Resonanz, dämpfungs-freie oder gedämpfte Bewegung, monochromatisches oder statistisches Licht voraussetzen, muß für die Spezialdiskussion zurückgestellt werden. Dieselbe wird ergeben, daß in der Nähe der Resonanz ($n = n_0$) unser Zeitvirial vernachlässigt

werden kann, daß es aber bei unvollkommener Resonanz wesentlich ist, derart, daß durch sein Hinzutreten die lichtelektrische Energie T im allgemeinen unter den Wert $\nu_0 h$ heruntergedrückt, unter Umständen auch diesen Wert überschreiten kann, ferner daß bei der normalen elektromagnetischen Dämpfung eine lichtelektrische Energie vom Betrage $\nu_0 h$ überhaupt unmöglich ist, daß wir also die Dämpfung als unternormal klein voraussetzen müssen, endlich daß bei natürlichem Licht (d. h. bei Licht von unbekannter oder nur statistisch bekannter Zusammensetzung), auch wenn es den praktisch erreichbaren höchsten Grad des Monochromatismus einer engen Spektrallinie besitzt, eine starke Streuung der Energie stattfindet um denjenigen Wert herum, der einem idealen monochromatischen Wellenzuge von der mittleren Schwingungsdauer des erregenden Lichtes entsprechen würde.

Daraufhin zeigen unsere Umformungen (a) und (b) folgendes:

I. Bei vollkommener Resonanz zwischen der Eigenschwingung des Elektrons und der Schwingungszahl des auffallenden, rein monochromatisch vorausgesetzten Wellenzuges ist die kinetische Energie des lichtelektrischen Elektrons unabhängig von der Intensität des auffallenden Lichtes und universell bestimmt durch dessen Schwingungszahl, nämlich gleich $h\nu = h\nu_0$. Sie ist also auch unabhängig von der Akkumulationsdauer τ , die bis zur Anhäufung eines vollen Wirkungsquantums verstreichen mußte, und die ihrerseits natürlich durch die Intensität des auffallenden Lichtes bestimmt wird.

II. Wird das auffallende Licht wieder als rein monochromatisch vorausgesetzt, aber seiner Schwingungszahl nach als verschieden von der Eigenschwingung des Elektrons, so ergibt sich für die lichtelektrische Energie eine Zackenkurve, die zur Abszisse $(\nu - \nu_0)\tau$ aufgetragen ein scharfes Maximum in der Nähe der Resonanzstelle besitzt. Diese Kurve hängt von der auffallenden Intensität nur insofern ab, als der Maßstab auf der Abszissenachse durch Vermittelung der Akkumulationszeit τ von der Intensität abhängig ist: Bei schwacher Intensität (τ groß) treten nur in der unmittelbaren Nähe der Resonanz ($\nu - \nu_0$ sehr klein) erhebliche lichtelektrische Energien auf, bei größerer Intensität (τ kleiner) verbreitert sich die Zacke über ein größeres

Gebiet der Werte $\nu - \nu_0$. Indem wir in unserer Grundhypothese das Wirkungsintegral gleich $+h/2\pi$ (nicht gleich $-h/2\pi$) setzen, erreichen wir, daß eine Art Stokesscher Regel gilt: Es können im wesentlichen nur Wellen von größerer Frequenz als der Eigenfrequenz des Elektrons lichtelektrisch wirken.

III. Die (durch Ausstrahlung bedingte) Dämpfung des Elektrons muß dabei einen erheblich kleineren Wert haben, als er für ein einzelnes isoliertes Elektron elektromagnetisch berechnet wird. Bei der normalen elektromagnetischen Dämpfung würde eine Befreiung des Elektrons im Resonanzfalle überhaupt illusorisch werden und würden sich bei der unvollkommenen Resonanz nur sehr kleine lichtelektrische Energien ergeben. Ist dagegen die Dämpfung unternormal, d. h. beträgt sie nur einen gewissen Bruchteil der normalen Dämpfung, so bestehen die Aussagen unter I. und II. zu Recht; insbesondere wird dann die lichtelektrische Energie im Resonanzfalle, unabhängig von der Größe der Dämpfung, genau gleich $h\nu$.

IV. Läßt man die (physikalisch natürlich unzulässige) Voraussetzung eines strengen Monochromatismus fallen, und setzt das auffallende Licht als eine enge Spektrallinie voraus, von der nur die durchschnittliche Intensität bekannt ist, so ergibt sich statt eines bestimmten Wertes von T und τ je ein Verteilungsgesetz für diese beiden Größen. Bei der Ermittlung desselben haben wir uns auf das dämpfungsfreie Elektron und auf das Analogon zur vollkommenen Resonanz beschränkt, also auf den Fall, wo der Schwerpunkt der Spektrallinie mit der Eigenfrequenz des Elektrons koinzidiert. Während bei monochromatischer Betrachtungsweise die erfahrungsmäßige Kohärenz des Lichtes der Auslösung des Elektrons eine Grenze setzen würde, sobald die dazu erforderliche Akkumulationszeit die Kohärenzdauer übersteigt, füllt diese Schwierigkeit bei statistischer Behandlung naturgemäß fort: Jeder einzelne Bestandteil des natürlichen Lichtes, wie er sich durch die Fouriersche Analyse ergibt, ist definitionsgemäß unbegrenzt kohärent; die Störung aber, welche die Wirkung je eines Bestandteiles durch die der übrigen erfährt, wird bei der statistischen Behandlung statistisch berücksichtigt.

V. Die Möglichkeit unserer Umformungen, die zu den Gleichungen (a) und (b) führten, ist durchaus gebunden an die

besondere Form unserer Grundhypothese, nach der wir verlangen:

$$\int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{h}{2\pi}.$$

Würden wir hier statt des „kinetischen Potentials“ $T - U$ etwa die kinetische Energie T oder die Gesamtenergie $T + U$ substituieren, so würde unsere Umformung, die auf der Benutzung der Bewegungsgleichung beruht, und damit unsere Erklärung des lichtelektrischen Effektes hinfällig werden. Es ist dies genau derselbe formale Umstand, der im Hamiltonschen Prinzip der Mechanik das Auftreten von $T - U$ bedingt und dort gestattet, umgekehrt die Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip zu entnehmen.

Erster Teil.

Monochromatisches Licht.

§ 2. Vollkommene Resonanz zwischen auffallender Welle und Eigenschwingung.

Um das Wesentliche unseres Gedankenganges hervortreten zu lassen, stellen wir den folgenden einfachsten Idealfall voran und behandeln ihn durch direkte Ausrechnung, ohne die hier entbehrlichen allgemeinen Umformungen und Kunstgriffe des § 1 zu benutzen:

Die auffallende Welle ist rein harmonisch von der Frequenz n (Schwingungszahl in 2π Zeiteinheiten). Ihr elektrischer Bestandteil kann also geschrieben werden¹⁾:

$$\mathcal{E} = E \cos nt.$$

Das von ihr getroffene Elektron ist durch den Atomverband quasielastisch an eine Ruhelage ($x = 0$) gebunden, derart, daß die rücktreibende Kraft gesetzt werden kann gleich

$$-fx.$$

1) Auf die Phase, mit der die anregende Schwingung bei $t = 0$ einsetzt, kommt es nicht an, wie man sich nachträglich überzeugen kann; dieselbe durfte daher speziell gewählt werden.

Ist m die Elektronenmasse, so wird die Eigenfrequenz, die mit der auffallenden Welle in Resonanz stehen soll:

$$(1) \quad n^2 = \frac{f}{m}.$$

Von der Dämpfung sehen wir zunächst ab.

Unsere Grundhypothese lautet, daß das Elektron das Molekül dann verläßt, wenn die „Wirkung“ gleich $h/2\pi$ geworden ist. Bezeichnet man die „Wirkungszeit“ oder „Akku-
mulationszeit“ mit τ , so soll also gelten:

$$(2) \quad \begin{cases} W = \int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{h}{2\pi}, \\ T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{f}{2} x^2. \end{cases}$$

Die Ausschwingung x des Elektrons ist aus der Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + f x = e \mathcal{E}$$

zu entnehmen, die wir nach den vorangehenden Erklärungen auch schreiben können:

$$(3) \quad \ddot{x} + n^2 x = \frac{e E}{m} \cos n t.$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$x = \dot{x} = 0 \text{ für } t = 0$$

lautet ihr Integral

$$(4) \quad x = \frac{e E}{2 m n} t \sin n t.$$

Die Schwingungen wachsen also in diesem Idealfalle (Resonanz ohne Dämpfung) unbegrenzt an.

Hieraus folgt

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{e E}{2 m n} (\sin n t + n t \cos n t), \\ T &= \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin n t + n t \cos n t)^2. \end{aligned}$$

Andererseits wegen (1):

$$(6) \quad U = \frac{f}{m} \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (t \sin n t)^2 = \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (n t \sin n t)^2.$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$\begin{aligned} T - U &= \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin^2 n t + n t \sin 2 n t + n^2 t^2 \cos 2 n t) \\ &= \frac{(e E)^2}{16 m n^2} \left(1 - \cos 2 n t + \frac{d}{dt} \{ n t^2 \sin 2 n t \} \right). \end{aligned}$$

Durch Integration ergibt sich:

$$W = \int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{(e E)^2}{16 m n^2} \left(\tau - \frac{\sin 2 n \tau}{2 n} + n \tau^2 \sin 2 n \tau \right)$$

oder

$$(7) \quad W = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n} \left(\sin 2 n \tau + \frac{1}{n \tau} - \frac{\sin 2 n \tau}{2 (n \tau)^2} \right).$$

Wir sehen $n \tau$ als große Zahl an, vorbehaltlich der nachfolgenden Bestätigung dieser Annahme. Dann wird der Wert der Klammer wesentlich bestimmt durch das erste Glied $\sin 2 n \tau$. Soll aber bei wachsendem τ die Wirkung W erstmalig den Wert $h/2\pi$ erreichen, so kann dies nur in unmittelbarer Nähe eines Maximalwertes

$$(8) \quad \begin{cases} \sin 2 n \tau = 1, & \cos 2 n \tau = 0, \\ \cos^2 n \tau = \sin^2 n \tau = \frac{1}{2} \end{cases}$$

stattfinden. Man betrachte zur Erläuterung dessen die Fig. 1, welche W als Funktion von t darstellt und erkennen läßt, daß die Wirkungskurve von der (in der Figur gestrichelten) Geraden $W = h/2\pi$ nur in der Nähe einer ihrer positiven Maximalelongationen geschnitten werden kann.

Aus (7) und (8) folgt in Annäherung:

$$(9) \quad W = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n}.$$

Berechnen wir nun für den gleichen Wert von τ die kinetische Energie. Nach (5) ist

$$T = \frac{(e E)^2}{8 m n^2} (\sin^2 n \tau + 2 n \tau \sin n \tau \cos n \tau + (n \tau)^2 \cos^2 n \tau).$$

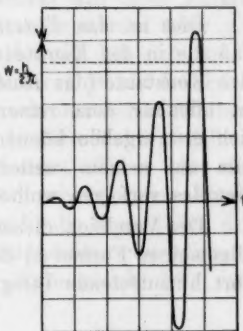


Fig. 1.

Wegen unserer Voraussetzung eines großen Wertes von $n\tau$ können wir mit Annäherung auch schreiben

$$(10) \quad T = \frac{(e E \tau)^2}{8 m} \cos^2 n \tau,$$

oder wegen (8)

$$(11) \quad T = \frac{(e E \tau)^2}{16 m}.$$

Soll das Elektron lichtelektrisch frei werden können, so ist nach unserer Grundhypothese und Gleichung (9):

$$W = \frac{h}{2\pi} = \frac{(e E \tau)^2}{16 m n}.$$

Dann beträgt aber, wie der Vergleich mit (11) zeigt, seine kinetische Energie:

$$(12) \quad T = h \frac{n}{2\pi} = h \nu.$$

Dies ist das *Einsteinsche Gesetz*, mit dem Unterschiede, daß die in der Einsteinschen Formel noch auftretende additive Konstante (das Austrittspotential P) hier fortfällt. Diese ist offenbar dem reinen Molekularprozeß fremd und würde sich erst ergeben können, wenn wir das lichtelektrische Quantum auf seinem weiteren Wege durch die Oberfläche des Metalles verfolgen wollten.

Der Vergleich dieser direkten Ausrechnung von T mit der allgemeinen Formel (a) des vorigen Paragraphen zeigt, daß das dort hinzutretende Integral

$$J = \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt$$

im Falle der Resonanz verschwinden muß oder, genauer gesagt, gegen T vernachlässigt werden kann. Wir bestätigen dies der Vollständigkeit wegen.

Es ist nach (4)

$$\begin{aligned} J &= \frac{(e E)^2}{4 m} \int_0^{\tau} t \sin n t \cos n t dt \\ &= \frac{(e E)^2}{8 m} \int_0^{\tau} t \sin 2 n t dt = \frac{(e E)^2}{16 m n} \left(-\tau \cos 2 n \tau + \frac{\sin 2 n \tau}{2 n} \right), \end{aligned}$$

also wegen (8):

$$J = \frac{(e E)^2}{32 \pi n^2}.$$

Vergleichen wir dies mit dem für T gefundenen Werte (11), so ergibt sich

$$(13) \quad \frac{J}{T} = \frac{1}{2 (n \tau)^2},$$

also in der Tat eine verschwindende Zahl. Im Falle der Resonanz liefert also unser „Zeitvirial“ in Formel (a) keinen merklichen Beitrag zu T .

Neben der Energie T haben wir als zweite Unbekannte stets die Akkumulationszeit τ anzusehen. Aus (9) ergibt sich, wenn wir dort $W = h/2\pi$ setzen:

$$(14) \quad \tau^2 = \frac{16 \pi n h}{2 \pi (e E)^2}, \quad (n \tau)^2 = \frac{16 \pi n^3 h}{(e E)^2}.$$

Diese Gleichung stimmt inhaltlich überein mit einer Formel von H. A. Lorentz.¹⁾ Unter geeigneten Annahmen über die auffallende Amplitude E schließt man daraus, daß sich für $n\tau$ eine sehr große Zahl ergibt. Nehmen wir z. B. mit Lorentz an, daß in unserem auffallenden monochromatischen Wellenzug der millionste Teil der auf die Erdoberfläche auffallenden Intensität der Sonne konzentriert wäre. Dann wäre die erregende Intensität 2 erg/sec cm^2 (entsprechend einem Werte der Solarkonstante von $2 \cdot 10^9 \text{ erg/sec cm}^2$); die Raumdichte der erregenden Strahlung (gleich Intensität/Lichtgeschwindigkeit) wäre dann $\frac{2}{3} 10^{-10} \text{ erg/cm}^3$ und, da diese gleich $E^2/2$ ist, hätten wir

$$E^2 = \frac{4}{3} 10^{-10}.$$

Ferner ist (wir benutzen sog. rationelle Einheiten)

$$e = \sqrt{4\pi} \cdot 4,7 \cdot 10^{-10}, \quad m = 0,9 \cdot 10^{-27}, \quad h = 6,55 \cdot 10^{-27}$$

und bei einer Wellenlänge von $0,3 \mu$

$$v = 10^{15}.$$

1) Vgl. H. A. Lorentz, Physik. Zeitschr. 11. p. 1251. 1910: „Alte und neue Fragen der Physik“. Eine Abweichung um den Faktor 2 rührt daher, daß Lorentz fragt, wann die Energie erstmalig den Wert $h\nu$ erreicht, wir dagegen, wann W erstmalig den Wert $h/2\pi$ oder, was dasselbe ist (vgl. den Schluß dieses Paragraphen), wann die Gesamtenergie erstmalig den Wert $2h\nu$ erreicht.

Daraus ergibt sich nach Gleichung (14) rund

$$\nu \tau = 10^{10}.$$

Es würden also 10^{10} Einzelschwingungen verstreichen, bis der Akkumulationsprozeß beendet ist. Daß diese Zahl die bekannten Kohärenzverhältnisse des Lichtes bedeutend übersteigt, daß es also erfahrungsgemäß so lang andauernde monochromatische Wellenzüge nicht gibt, ist kein Einwand gegen unsere Auffassung des lichtelektrischen Effektes. Wir müssen die Annahme des monochromatischen Lichtes ohnehin später fallen lassen und die ganze Frage statistisch wenden. An dieser Stelle kam es uns nur darauf an, die Annahme zu rechtfertigen, daß $n\tau$ eine große Zahl sei, eine Annahme, von der bei Gleichung (7) und (13) Gebrauch gemacht wurde.

Wir wollen schließlich noch die Ausschwingung des Elektrons, d. h. seinen Abstand x von der Gleichgewichtslage berechnen im Momente, wo es das Atom verläßt.

Nach (4) und (8) ist

$$x = \frac{e E \tau}{2 \sqrt{2} m n}.$$

Aus (14) ergibt sich

$$e E \tau = 2 \sqrt{\frac{2 m n h}{\pi}},$$

also

$$(15) \quad x = \sqrt{\frac{h}{m n \pi}}.$$

Es ist bemerkenswert, daß auch diese Größe *unabhängig von der Intensität des Lichtes ist und sich universell aus dessen Frequenz bestimmt*, wie übrigens unmittelbar aus der für $t = \tau$ gültigen Beziehung $T = U$ folgt.

Zahlenmäßig ergibt sich, wenn wir wieder

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27}, \quad m = 0,9 \cdot 10^{-27}, \quad \nu = 10^{15},$$

also

$$n = 2 \pi \cdot 10^{15}$$

nehmen, rund

$$x = 2 \cdot 10^{-8}.$$

Dies ist durchaus die Größe der molekularen Wirkungssphäre. Bei kleinerer Schwingungszahl (rotes Licht) würde die von

uns zu berechnende Ausschwingung x dagegen jene Größe etwas überschreiten. Es entsteht die Frage, die hier unbeantwortet bleiben wird: Wie verhält sich das Elektron, wenn es aus der molekularen Wirkungssphäre hinaustritt, ohne daß nach unserer Grundhypothese die Bedingung für sein lichtelektrisches Freiwerden erreicht ist? Darf man die quasi-elastische Kraft auch dann noch wirkend denken? In diesem Zusammenhange darf vielleicht darauf hingewiesen werden, daß die Alkalien mit ihrer lichtelektrischen Empfindlichkeit im Roten ein besonders großes Atomvolumen haben.

Übrigens bemerke man, daß das Elektron nach unserer Phasenbedingung (8), $\sin 2n\tau = 1$, nicht bei maximaler Ausschwingung oder maximaler Geschwindigkeit fortfliegt, sondern bei der Schwingungsphase $\pi/4$, wo nach Gleichung (8)

$$\sin n\tau = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Damit hängt es zusammen, daß beim Fortfliegen des Elektrons dem Molekül ein gleich großer Betrag an potentieller Energie verbleibt, entsprechend der in § 1 besprochenen und in Fig. 1 zum Ausdruck gebrachten Maximalbedingung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \text{ für } t = \tau.$$

§ 3. Unvollständige Resonanz.

Die erregende Welle werde wie in § 2 als rein harmonisch angesetzt: Amplitude E , Frequenz n . Das Elektron sei quasi-elastisch schwingungsfähig, aber mit einer Eigenfrequenz n_0 , die von n verschieden ist. Dabei gilt

$$n_0^2 = \frac{f}{m}.$$

Die Bewegungsgleichung wird (vgl. Gleichung (3)):

$$(16) \quad \ddot{x} + n_0^2 x = \frac{eE}{m} \cos nt.$$

Ihre Lösung lautet, wenn das Elektron anfangs in Ruhe war

$$(x = \dot{x} = 0 \text{ für } t = 0)$$

$$(17) \quad x = -\frac{eE}{m} \frac{\cos nt - \cos n_0 t}{n^2 - n_0^2}.$$

Anstatt nun wie im § 2 mit diesem Werte von x den Ausdruck von W direkt auszurechnen, stützen wir uns hier auf die allgemeine Formel (a) des § 1 und berechnen in dieser das Integral

$$J = \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt = \\ - \frac{n_0 (e E)^2}{2 m (n^2 - n_0^2)} \left\{ \int_0^{\tau} \cos^2 n t dt - \int_0^{\tau} \cos n t \cos n_0 t dt \right\}.$$

Nun hat man

$$(18) J_1 = \int_0^{\tau} \cos^2 n t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} (1 + \cos 2 n t) dt = \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{\sin 2 n \tau}{2 n \tau} \right)$$

und

$$J_2 = \int_0^{\tau} \cos n t \cos n_0 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \{ \cos (n - n_0) t + \cos (n + n_0) t \} dt \\ = \frac{\sin (n - n_0) \tau}{2 (n - n_0)} + \frac{\sin (n + n_0) \tau}{2 (n + n_0)}$$

oder

$$(19) J_2 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\sin (n + n_0) \tau}{(n + n_0) \tau} \right)$$

mit der Abkürzung

$$(20) \varepsilon = (n - n_0) \tau.$$

Unter der ebenso wie im vorigen Paragraphen zu bestätigenden Annahme $n \tau \gg 1$, $n_0 \tau \gg 1$, die aber keineswegs etwa $(n - n_0) \tau = \varepsilon \tau \gg 1$ zur Folge hat, kann man in J_1 und J_2 offenbar je einen Term streichen und erhält:

$$(21) J_1 = \frac{\tau}{2}, \quad J_2 = \frac{\tau}{2} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon},$$

somit

$$(22) \left\{ \begin{aligned} J &= - \frac{n_0 (e E)^2 \tau}{4 m (n^2 - n_0^2)} \left(1 - \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) \\ &= - \frac{n_0 (n + n_0)}{4 m} \left(\frac{e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 (\varepsilon - \sin \varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Wir stützen uns ferner zur Berechnung von T auf die Formel (b) des § 1. Nach dieser und Gleichung (17) ist

$$T = \frac{n_0^2}{2 m} \left(\frac{e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 [\cos^2 n t + \cos^2 n_0 t - 2 \cos n t \cos n_0 t]_m.$$

Der Index m an der eckigen Klammer bedeutet dabei, daß der Mittelwert für die Zeit $t = \tau$ zu nehmen ist. Dieser beträgt $\frac{1}{2}$ für jeden der beiden ersten Terme; im dritten Term hat man

$$2 \cos n t \cos n_0 t = \cos(n + n_0)t + \cos(n - n_0)t,$$

also als Mittelwert dieses Terms zur Zeit $t = \tau$, da $\cos(n + n_0)t$ eine schnell oszillierende Größe vom Mittelwert Null ist:

$$\cos(n - n_0)\tau = \cos \varepsilon.$$

Mithin wird:

$$(23) \quad T = \frac{n_0^2}{2m} \left(\frac{eE}{n^2 - n_0^2} \right)^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Wir setzen die Werte (22) und (23) in die Gleichung (a) des § 1 ein, die mit der Abkürzung J geschrieben lautet

$$T - J = \nu_0 h$$

und nunmehr übergeht in:

$$\left(\frac{n_0 e E}{n^2 - n_0^2} \right)^2 \left(1 - \cos \varepsilon + \frac{n + n_0}{2n_0} (\varepsilon - \sin \varepsilon) \right) = 2m \nu_0 h.$$

Hier ist der Faktor

$$\frac{n + n_0}{2n_0} = 1 + \frac{n - n_0}{2n_0} \cong 1$$

unter Beschränkung auf die Nachbarschaft der Resonanz. Danach vereinfacht sich die vorige Gleichung zu

$$(24) \quad 1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon = 2m \nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2.$$

Hier haben wir die gewünschte Bestimmungsgleichung für die Akkumulationszeit τ , die in der Verbindung $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ nur auf der linken Seite dieser Gleichung vorkommt, während die rechte Seite bei gegebenem n , n_0 , E als bekannter Zahlenwert angesehen werden kann.

Wir haben gleichzeitig den gesuchten Wert von T in definitiver Form, wenn wir die Ausdrücke (23) und (24) linker- und rechterhand miteinander multiplizieren, nämlich

$$T(1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon) = \nu_0 h (1 - \cos \varepsilon)$$

oder

$$(25) \quad T = \nu_0 h \left(1 + \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right)^{-1}.$$

T ist hiernach bekannt, sobald ε aus Gleichung (24) bestimmt ist.

§ 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie.

Wir diskutieren zunächst Gleichung (24). Die linke Seite dieser Gleichung möge mit $\eta = \eta_1 + \eta_2$ bezeichnet werden; sie stellt sich in einem (ε, η) -Diagramm als eine unter 45° geneigte Gerade $\eta_1 = 1 + \varepsilon$ dar, der eine regelmäßige Sinusschwingung

$$\eta_2 = -\sin \varepsilon - \cos \varepsilon = -\sqrt{2} \sin \left(\varepsilon + \frac{\pi}{4} \right)$$

von der Amplitude $\sqrt{2}$ und der Periode 2π überlagert ist. Die positiven Minima bzw. Maxima der resultierenden Kurve liegen bei den Abszissen

$$\varepsilon = 2m\pi \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Kurve stellt natürlich nicht den Verlauf des Wirkungsintegrals W selbst dar — dieser ist schnell oszillierend —, sondern verbindet die für uns allein in Betracht kommenden Maxima von W — ist also eine Art abgeglätteter Enveloppe jener. Ihre Hebungen und Senkungen entsprechen nicht den

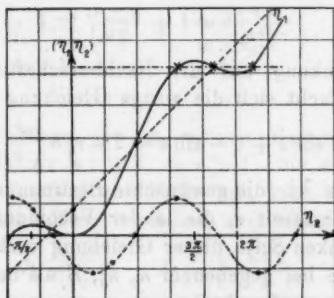


Fig. 2.

Einzelschwingungen, sondern den — aus vielen Einzelschwingungen sich zusammensetzenden — *Schwebungen* des Akkumulationsvorganges.

Die Kurve hat eine Bedeutung für uns nur auf gewissen Teilstrecken und zwar aus folgendem Grunde: Denken wir uns die rechte Seite von (24) gegeben, so bestimmt diese in Fig. 2 eine Parallele zur Abszissenachse, welche je nach

den Werten n , n_0 , E in größerem oder kleinerem Abstand von der Abszissenachse verläuft und die Kurve in einem oder in drei Punkten schneidet. Der Schnittpunkt mit kleinster Abszisse liefert vermöge der Beziehung $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ diejenige Zeit τ , bei der die Wirkung *erstmalig* den Wert $h/2\pi$ erreicht, die eventuell vorhandenen weiteren Schnittpunkte diejenigen Zeiten, bei denen dies ein zweites oder drittes Mal passieren würde, falls nicht schon bei der erstmaligen Anhäufung eines Wirkungsquantums das Elektron frei geworden wäre. Da aber nach unserer Grundhypothese letzteres stets der Fall ist, so sind die Teile der Kurve für uns bedeutungslos, die solche zweite oder dritte Schnittpunkte tragen.

Da τ positiv, kommen falls $n > n_0$ nur positive ε , falls $n < n_0$ nur negative ε in Betracht, im letzteren Falle ist notwendig

$$-\frac{\pi}{2} < \varepsilon < 0.$$

Zu $\varepsilon = -\pi/2$ gehört der Maximalwert $\eta = 2 - \pi/2$. Dieser begrenzt im Falle $n < n_0$ die zulässige Differenz $n - n_0$, bei der überhaupt noch eine Wirkung eintreten kann. Es muß nämlich nach Gleichung (24) sein

$$2 - \frac{\pi}{2} \geq 2m\nu_0 h \left(\frac{n^3 - n_0^3}{n_0 e E} \right),$$

d. h.:

$$(26) \quad n_0^3 - n^3 \leq \pi e E \sqrt{\frac{(4 - \pi) \nu_0}{m h}}.$$

Im entgegengesetzten Falle würde die vorher besprochene Parallele zur Abszissenachse, deren Abstand gleich der rechten Seite von (24) sein sollte, unsere Kurve im Falle $n < n_0$ überhaupt nicht bei negativem ε schneiden, und daher keine mögliche positive Akkumulationszeit bestimmen. Zahlenmäßig ergibt sich mit den p. 885 benutzten Daten (z. B. ν_0 gleich dem dortigen $\nu = 10^{16}$) für die fragliche Grenze:

$$n_0^3 - n^3 = 7 \cdot 10^{30}$$

und hieraus

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - 10^{-11}.$$

also mit $\lambda_0 = 0,3 \mu$ entsprechend $\nu_0 = 10^{16}$

$$\lambda - \lambda_0 = 3 \cdot 10^{-12} \mu.$$

Darin, daß dieser Unterschied praktisch durchaus gleich Null ist, können wir ein Analogon der Stokesschen Regel der Fluoreszenz sehen. Unser Ergebnis besagt: Bei gegebener Wellenlänge λ des auffallenden Lichtes ist die kleinste Eigenwellenlänge λ_0 eines Resonators, der eben noch lichtelektrisch erregt werden kann, nicht merklich kleiner als λ .

Anders liegen die Verhältnisse im Falle eines positiven ε , wo also $\lambda < \lambda_0$, $n > n_0$ ist. Wie groß auch der Unterschied $n - n_0$ sein möge, immer findet man, wenn man in dem durch die rechte Seite von (24) definierten Abstände eine Parallele zur Abszissenachse der Fig. 2 legt, an unserer Kurve einen Schnittpunkt von physikalischer Bedeutung und daher eine zu diesem Unterschiede $n - n_0$ gehörige mögliche Akkumulationszeit. Ein Resonator, dessen Eigencellenlänge größer als die Wellenlänge der auffallenden Schwingung ist, kann also stets lichtelektrisch erregt werden. Z. B. ergibt sich unter den soeben benutzten Daten bei einer um eine Oktave tieferen Eigenschwingung ($\nu = 10^{15}$, $\nu_0 = \frac{1}{2} 10^{15}$) nach (24), indem 1, $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$ hier gegen ε gestrichen werden darf:

$$2m\nu_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2 = 1,4 \cdot 10^{21} = \varepsilon = (n - n_0) \tau = \frac{1}{2} n \tau$$

und hieraus als Anzahl der Schwingungen, nach deren Ablauf ein Wirkungsquantum angehäuft ist:

$$\nu \tau = 4,5 \cdot 10^{30}.$$

Bei so großer Differenz von n und n_0 wächst also die Akkumulationszeit ungeheuer an gegenüber dem Falle vollkommener Resonanz in § 2, wo unter den gleichen Umständen $\nu \tau = 10^{10}$ gefunden wurde.

Wir kommen jetzt zur graphischen Diskussion des Ausdruckes (25) für T . Tragen wir T zunächst als Funktion von ε auf, so ergibt sich das folgende Kurvenbild (Fig. 3).

Für $\varepsilon = 0$ haben wir $T = \nu_0 h$ entsprechend dem Einsteinschen Gesetz, und für sehr kleine Werte von ε :

$$T = \nu_0 h \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

also einen Anstieg nach negativen ε hin. Der kleinste Wert von ε , welcher nach der vorigen Figur noch physikalische Be-

deutung hat, ist $\varepsilon = -\pi/2$. Ihm entspricht als größter Wert von T

$$T_{\max.} = \nu_0 h \frac{2}{4 - \pi} = 2,3 \cdot \nu_0 h.$$

Man hat ferner nach (25) für:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi$$

$$T = \nu_0 h \left(\frac{2}{\pi}, \quad \frac{2}{2 + \pi}, \quad \frac{2}{4 + 3\pi}, \quad 0, \quad \frac{2}{2 + 3\pi}, \quad 0 \right).$$

Die Kurve für T nähert sich also mit abnehmenden Oszillationen der Abszissenachse, die sie bei allen Vielfachen von

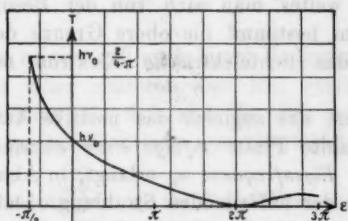


Fig. 3.

2π berührt. An diesen Stellen ist nämlich $1 - \cos \varepsilon = 0$ und daher auch

$$\left(1 + \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right)^{-1} = 0.$$

Da diese Minima der Fig. 3 den Minimis in Fig. 2 entsprechen, so hat die Kurve in ihrer Umgebung keine Bedeutung. Die T -Werte nehmen hiernach durchschnittlich ab mit wachsendem ε und sind für alle ε -Werte, die nach der vorigen Figur vermöge unserer h -Hypothese überhaupt in Betracht kommen, von Null verschieden.

Von der Skala der ε wollen wir in Gedanken noch zur Skala der $n - n_0$ übergehen, durch Division mit der auf Grund der Fig. 2 bestimmten Akkumulationszeit τ . Wir erkennen dann, daß sich der ganze Verlauf der Fig. 3 in der unmittelbaren Nähe der vollkommenen Resonanz abspielt. Z. B. gehörte zu $\varepsilon = -\pi/2$ ein Wellenlängenunterschied $\lambda - \lambda_0$, der praktisch durchaus unmerklich ist; dasselbe würde sich für alle positiven ε ergeben, für die nicht $\varepsilon \gg 1$ ist. Andererseits fanden

wir bei einem Unterschied von einer Oktave zwischen der anregenden und der Eigenfrequenz ($n - n_0 = \frac{1}{2} n$) einen ϵ -Wert von der Größenordnung 10^{21} ; diesem würde nach Gleichung (25) ein T -Wert von der Größenordnung $h \cdot 10^{-21}$ entsprechen, also eine Geschwindigkeit des lichtelektrischen Elektrons, die direkt gleich Null gesetzt werden kann. Dies war von vornherein zu erwarten auf Grund der wohlbekannten Resonanzgesetze. Wenn die auffallende Schwingung von der Eigenschwingung des Resonators merklich verschieden ist, steigt dessen Energie nicht unbegrenzt an, sondern führt im dämpfungsfreien Falle Schwebungen aus, bei denen das Amplitudenmaximum um so kleiner ist, je weiter man sich von der Resonanz entfernt. Dieses Maximum bestimmt die obere Grenze der kinetischen Energie, die das lichtelektrische Elektron mit sich fortführen kann.

Fig. 3 liefert uns zugleich das positive Aufladepotential, das eine bestrahlte Platte infolge einer einzelnen Elektronengattung von der Eigenfrequenz n_0 erlangt, in Abhängigkeit von der Frequenz n der auffallenden Strahlung. Dabei haben wir von den Ordinaten der Fig. 3 das (für das einzelne Elektron berechnete) Austrittspotential P (vgl. p. 884) abzuziehen und haben die Abszissen durch Division mit τ , wie zuletzt beschrieben, auf die Skala der $n - n_0$ zu reduzieren. Unsere Figur nimmt dabei die Gestalt einer äußerst scharf ausgebildeten Zacke an, welche nach der Seite der abnehmenden n absolut scharf und auch nach der Seite der wachsenden n sehr steil abfällt. Unsere Theorie läßt also die Möglichkeit stark ausgeprägter selektiver Effekte erwarten. Beim Vorhandensein mehrerer merklich voneinander verschiedener Eigenfrequenzen n_0 würden mehrere solche Zacken auftreten, und ihre Höhen würden mit der Eigenfrequenz n_0 , also auch mit der sie erregenden auffallenden Frequenz n linear wachsen.

§ 5. Ergänzungen und Modifikationen.

Aus der Maximalbedingung $dW/dt = 0$ wurde in der Einleitung für den Moment der Befreiung des Elektrons auf die Gleichheit der kinetischen und potentiellen Energie und als Ausdruck derselben auf die Gleichung geschlossen (vgl. p. 877):

$$\dot{x}^2 = n_0^2 x^2.$$

Von den beiden Wurzeln derselben

$$\dot{x} = \pm n_0 x$$

wurde bei der Aufstellung der Gleichung (a) nur das positive Vorzeichen berücksichtigt. Wählen wir das negative Vorzeichen, so ergibt sich

$$\frac{m}{2} x \dot{x} = - \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2}{n_0} = - \frac{T}{n_0}$$

und statt der Gleichung (a):

$$(a') \quad -T = v_0 h + \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathcal{E} dt.$$

Wir wollen zeigen, daß nach dieser Bedingung das Elektron immer erst zu einer späteren Zeit frei werden würde, wie nach der Gleichung (a), daß also für die tatsächliche erstmalige Befreiung des Elektrons nur Gleichung (a) zu berücksichtigen ist.

Setzen wir nämlich in (a') für T den Wert aus Gleichung (23) und für das zweite Glied auf der rechten Seite von (a') den Wert von J aus Gleichung (22) ein, so ergibt sich statt (24):

$$(24') \quad -1 + \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon = 2 m v_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E} \right)^2.$$

In Fig. 4 ist zur Abszisse ε die linke Seite dieser Gleichung, Kurve η' , neben der linken Seite von Gleichung (24), Kurve η , eingezeichnet. Schneidet man nun diese Kurven mit einer Parallelen zur Abszissenachse auf der positiven Seite derselben — entsprechend dem positiven Vorzeichen der rechten Seite von (24) und (24') —, so gehört der Schnittpunkt mit der Kurve η' stets zu einem *größeren* positiven ε , wie derjenige mit der Kurve η , der in Fig. 4 durch ein Kreuz hervor gehoben ist (Schnittpunkte mit der Kurve η' bei negativem ε sind überhaupt nicht vorhanden). Wir schließen daraus, daß die Bedingung (a) stets bei *kleinerem* τ erfüllt ist, wie die Bedingung (a'), daß also für die Befreiung des Elektrons lediglich Gleichung (a) maßgebend ist.

Hieran schließt eine Bemerkung, welche das Vorzeichen von h in unserer Grundhypothese betrifft. Formuliert man

diese folgendermaßen (mit unbestimmtem Vorzeichen des Wirkungsintegrals):

$$\int_0^{\epsilon} (T - U) dt = \pm \frac{h}{2\pi},$$

so bleibt unsere Berechnung des Wirkungsintegrals in allen Einzelheiten erhalten, nur daß auf der rechten Seite der Gleichung (24) und (24') $\pm h$ an Stelle von $+h$ tritt. Bei Wahl des negativen Vorzeichens von h hätten wir dann unsere Kurven η , η' in Fig. 4 mit einer Parallelen zur Ab-

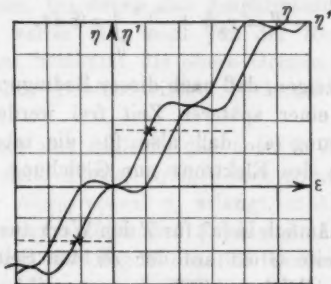


Fig. 4.

szissenachse auf der *negativen* Seite derselben zu schneiden. Der maßgebende, zu kleinerer Akkumulationszeit gehörende Schnittpunkt würde dann auf der Kurve η' liegen (in Fig. 4 durch ein Kreuz hervorgehoben), so daß in diesem Falle nicht mehr die Bedingung (a), sondern (a') die Befreiung des Elektrons regulieren würde. Die Abszisse dieses Schnittpunktes liegt aber im allgemeinen auf der *negativen* Seite der ϵ , d. h. das Elektron würde im allgemeinen bei $\epsilon < 0$, d. h. $n < n_0$ befreit werden, entgegen der Stokesschen Regel, und es würde eine Ausnahme von dieser verkehrten Stokesschen Regel nur in unmittelbarer Nähe der Resonanz vorkommen (da, wo die Kurve η' in Fig. 4 bei positivem ϵ die Abszissenachse unterschreitet). Die kinetische Energie des befreiten Elektrons wäre, wie sich aus der Rechnung vom Ende des § 3 ergibt, nach Gleichung (23) und (24'):

$$T = \nu_0 h \left(1 - \frac{\epsilon - \sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon} \right)^{-1},$$

also bei negativem ε dieselbe wie nach Gleichung (25) bei gleich großem positiven ε .

Bei der umgekehrten Wahl des Vorzeichens in unserer Grundhypothese werden wir also zu lichtelektrischen Effekten derselben Art wie früher geführt, aber mit Umkehrung der Stokesschen Regel. Wir glauben daher, daß die von uns getroffene einseitige Wahl des Vorzeichens mit der Einseitigkeit der Stokesschen Regel und der höheren Wirksamkeit oder „Wertigkeit“ der größeren Frequenzen bei derartigen Energietransformationen innerlich verknüpft ist. Wir wollen allerdings nicht behaupten, daß diese Einseitigkeit der Stokes-schen Regel aus unserer Grundhypothese mit Notwendigkeit folge, sondern wollen lieber sagen, daß wir unsere Grundhypo- these hinsichtlich des Vorzeichens so formuliert haben, daß sie der Stokesschen Regel entspricht.

Schließlich haben wir uns noch über den Faktor $1/2\pi$ in unserer Grundhypothese auszusprechen. Dieser wurde so ge- wählt, daß das Einsteinsche Gesetz $T = h\nu$ gerade in dem idealen Falle der Resonanz herauskam. Es gibt aber Gründe, die dafür sprechen, diesen Faktor vielmehr in $\frac{1}{4}$ zu modi- fizieren.¹⁾

Wir wollen uns vorstellen, daß die Befreiung des Elektrons um so leichter vonstatten geht, je kleiner die Akkumulations- zeit τ wird, und wollen daher fragen, für welchen Wert von $n - n_0$ der kleinste Wert von τ erreicht wird, bei gegebenen Werten von n_0 und E .

ε bestimmt sich in der Verbindung $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ aus Gleichung (24). Für kleine Werte von ε erhält man hiernach

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) = 2 m v_0 h \left(\frac{n^2 - n_0^2}{n_0 e E}\right)^2.$$

Dividiert man also mit $(n - n_0)^2$ und setzt für kleine ε genähert $n + n_0 = 2 n_0$, so folgt

$$\tau^2 = \frac{16 m v_0 h}{(e E)^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

1) Es sei auch erwähnt, daß Hr. Langevin (Congrès Solvay, Brüssel 1911) unsere so modifizierte Grundhypothese angewandt hat, um die Größenordnung des Magnetons zu berechnen.

Für $\varepsilon = 0$ stimmt dieser Wert natürlich mit dem früher in (14) angegebenen überein. Für wachsende ε nimmt der Wert ab; wir haben also ein Minimum für $\varepsilon > 0$ zu erwarten. Dieses liegt bei $\varepsilon = \pi/2$, wie eine hier unterdrückte Zwischenrechnung zeigt, und beträgt

$$\tau^2 = \frac{4\pi m v_0 h}{(eE)^2}.$$

Der zugehörige Wert von T ist nach (25)

$$T = \frac{2}{\pi} v_0 h.$$

Hätten wir nun in unserer Grundhypothese $h/4$ an Stelle von $h/2\pi$ gesetzt, so würde in allen folgenden Formeln h zu multiplizieren sein mit $2\pi/4 = \pi/2$. Es würde also statt des vorstehenden Wertes von T der Einsteinsche Wert $T = v_0 h$ gerade für den ausgezeichneten Fall der kürzesten Akkumulationszeit auftreten; überhaupt wären alle von uns berechneten Werte von T im Verhältnis $\pi:2$ zu vergrößern.

Für die allgemeine Beurteilung unserer Grundhypothese ist diese Unsicherheit der Zahlenwerte natürlich ziemlich belanglos. Wir halten daher im folgenden durchweg an der ursprünglichen Formulierung unserer Hypothese fest, ohne uns für die Eindeutigkeit des Zahlenfaktors irgend verbürgen zu wollen.

§ 6. Einfluß der Dämpfung.

Für die erzwungene Schwingung eines Elektrons gilt bei Berücksichtigung der elektromagnetischen Strahlungsdämpfung bekanntlich das folgende Bewegungsgesetz (e in „rationellen“ Einheiten gemessen):

$$(27) \quad \ddot{x} + n_0^2 x - \frac{e^2}{6\pi c^2 m} \ddot{x} = \frac{eE}{m} \cos nt;$$

n_0 bedeutet die Eigenfrequenz des Elektrons im dämpfungsfreien Falle. Dasjenige Integral von (27), welches dem erzwungenen Endzustande der Bewegung entspricht, findet man wie bekannt gleich

$$(28) \quad x = C \cos n(t - \gamma)$$

mit den Abkürzungen (die Quadratwurzel als positiv gedacht):

$$(29) \quad \begin{cases} C = \frac{e E}{m} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - n_0^2)^2 + (\varrho n^3)^2}}, & \operatorname{tg} n \gamma = \frac{-\varrho n^3}{n^2 - n_0^2}, \\ \varrho = \frac{e^2 n}{6 \pi c^3 m}. \end{cases}$$

Die reine Zahl ϱ hat für ultraviolett Licht ($\nu = 10^{15}$) den Wert

$$(29a) \quad \varrho = 4 \cdot 10^{-8}.$$

Zur Bestimmung der freien Schwingungen des Elektrons andererseits dient der übliche Ansatz $x = A e^{i \alpha t}$. Gleichung (27) liefert dann mit $E = 0$:

$$-\alpha^2 + n_0^2 + \frac{i \varrho}{n} \alpha^3 = 0,$$

oder, da näherungsweise $\alpha = \pm n_0$ ist,

$$\alpha^2 = n_0^2 \left(1 \pm i \varrho \frac{n_0}{n} \right), \quad i \alpha = \pm i n_0 - \varrho \frac{n_0^3}{2 n}.$$

Wir benutzen die weitere Abkürzung

$$(29b) \quad \varrho_0 = \frac{1}{2} \varrho \frac{n_0}{n},$$

die ebenso wie ϱ eine reine Zahl von derselben Größenordnung wie diese ist. Der Ausdruck der freien Schwingungen des Elektrons wird dann:

$$(30) \quad x = e^{-\varrho_0 n_0 t} (A \cos n_0 t + B \sin n_0 t).$$

Das allgemeine Integral von (27) setzt sich aus (28) und (30) additiv zusammen:

$$(31) \quad x = C \cos n(t - \gamma) + e^{-\varrho_0 n_0 t} (A \cos n_0 t + B \sin n_0 t);$$

um es den Anfangsbedingungen $x = \dot{x} = 0$ für $t = 0$ anzupassen, haben wir zu wählen:

$$(31a) \quad \begin{cases} A = -C \cos n \gamma, \\ B = -C \sin n \gamma \left(\frac{n}{n_0} + \varrho_0 \operatorname{ctg} n \gamma \right) = -C \sin n \gamma, \end{cases}$$

letzteres unter Streichung von $(n - n_0)^2$ gegen n_0^2 . Also folgt

$$(32) \quad x = C \cos(n t - \gamma) - C e^{-\varrho_0 n_0 t} \cos(n_0 t - n \gamma).$$

Zur Berechnung des Wirkungsintegrals greifen wir auf die Umformung (a) des § 1 zurück, welche, wie man leicht

nachrechnet, auch bei gedämpften Schwingungen nicht merklich abzuändern ist. Hier ist zunächst das Integral

$$J = \frac{n_0 e}{2} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt$$

mit Rücksicht auf (32) auszurechnen. Wir benutzen dieselben Vernachlässigungen wie früher, nämlich

$$n\tau \gg 1, \quad n - n_0 \ll n + n_0$$

und setzen sogleich das Resultat der ziemlich elementaren Umrechnung her:

$$(33) \quad J = -\frac{n_0^2 m C^2}{2} (\varepsilon - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) + \sin 2n\gamma),$$

mit der auch früher benutzten Abkürzung

$$(34) \quad \varepsilon = (n - n_0)\tau.$$

Wir haben ferner die kinetische Energie T für den Moment $t = \tau$ zu berechnen, wobei wir uns auf die Gleichung (b) des § 1 stützen.

Nach (32) wird:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} = C^2 [\cos^2 n(t - \gamma) + e^{-2\varepsilon_0 n_0 t} \cos^2(n_0 t - n\gamma) \\ - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 t} \cos n(t - \gamma) \cos(n_0 t - n\gamma)]_m. \end{aligned}$$

Der Index m bedeutet die Bildung des Mittelwertes für eine Schwingung zur Zeit $t = \tau$, wobei die Exponentialfunktion als langsam veränderliche Größe behandelt werden kann.

Man findet leicht:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} C^2 (1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau} - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon).$$

Mithin nach Gleichung (b) des § 1:

$$(35) \quad T = \frac{n_0^2 m C^2}{4} (1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau} - 2e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon).$$

Tragen wir die Ausdrücke (33) und (35) mit dem Werte von C aus (29) in die Gleichung (a) des § 1 ein, die wir mit der Abkürzung J schreiben können:

$$T - J = \nu_0 h,$$

so folgt:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau}) - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon + \varepsilon - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) \\ & + \sin 2n\gamma = 2m\nu_0 h \frac{(n^2 - n_0^2)^2 + (\varepsilon n^2)^2}{(n_0 e E)^2}. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung haben wir als Bestimmungsgleichung für τ mit Rücksicht auf die Dämpfung anzusehen, geradeso wie Gleichung (24) des § 3, in welche sie für $\varrho_0 = 0$, $\gamma = 0$ übergeht, im dämpfungsfreien Falle.

Um schließlich die diesem Zeitpunkte τ entsprechende kinetische Energie in geeignetster Form anzugeben, gehen wir nochmals auf die Gleichung (a) des § 1:

$$T - J = \nu_0 h$$

zurück, schreiben diese in der Form:

$$(37) \quad T = \nu_0 h \left(1 - \frac{J}{T}\right)^{-1},$$

wobei nach (33) und (35) ist

$$(37a) \quad -\frac{J}{T} = \frac{\varepsilon - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \sin(\varepsilon + 2n\gamma) + \sin 2n\gamma}{\frac{1}{2}(1 + e^{-2\varepsilon_0 n_0 \tau}) - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau} \cos \varepsilon}.$$

Natürlich geht die Gleichung (37) mit (37a) im dämpfungsfreien Falle ($\varrho_0 = 0$, $\gamma = 0$) in die entsprechende Gleichung (25) des § 4 über.

Um an Hand dieser Ergebnisse den Einfluß der Dämpfung zu diskutieren, betrachten wir zunächst den Fall *vollkommener Resonanz*. In diesem ist jedenfalls $\varepsilon = 0$ und nach (29) $\operatorname{tg} n\gamma = \infty$, $n\gamma = \pi/2$, also $\sin 2n\gamma = 0$. Das Verhältniß (37a) wird also bei beliebigem Betrage der Dämpfung gleich Null und Gleichung (37) liefert *wie bei verschwindender Dämpfung das wohlbekannte Gesetz*:

$$T = \nu_0 h = \nu h.$$

Zugleich belehrt uns Gleichung (36) darüber, unter welchen Umständen eine Ansammlung dieser Energiemenge bei vorhandener Dämpfung möglich ist. Gleichung (36) wird mit $n = n_0$, $\varepsilon = 0$, $\sin 2n\gamma = 0$:

$$(38) \quad \frac{1}{2}(1 - e^{-\varepsilon_0 n_0 \tau})^2 = 2m\nu h \left(\frac{e n}{e E}\right)^2.$$

Diese Bestimmungsgleichung für τ führt auf einen möglichen Wert von τ dann und nur dann, wenn die rechte Seite kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, wenn also gilt:

$$(39) \quad \varrho < \frac{e E}{\sqrt{4m n^2 \nu h}}.$$

Benutzen wir die Daten von p. 885, so müßte also sein

$$\rho < 2 \cdot 10^{-11}.$$

Dieser Wert ist viel kleiner wie der in Gleichung (29a) angeschriebene Wert $\rho = 4 \cdot 10^{-8}$, der aus den Elektronendaten e und m berechnet war. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß die normale elektromagnetische Strahlungsdämpfung viel zu groß ist, um eine Anhäufung der Energie bis zu demjenigen Betrage zuzulassen, der im Resonanzfalle für das Freiwerden des Elektrons erforderlich ist. Hiernach würden die hohen Geschwindigkeiten, die für den Resonanzfall charakteristisch sind, in Wirklichkeit nicht auftreten können. Es ist aber auch eine andere Auffassung möglich. Das normale Dämpfungsverhältnis ρ wird theoretisch bestimmt für ein einzelnes Elektron. Man überlegt sich leicht, daß in einem Aggregat von vielen Elektronen, wie wir es doch im Molekül vorhanden denken müssen, dieser normale Betrag der Dämpfung, je nach der gegenseitigen Lage der einzelnen Elektronen, beliebig über- oder unterschritten werden kann. Die hohen Geschwindigkeiten des Resonanzfalles wären danach gebunden an das zufällige Vorhandensein einer unter-normalen Dämpfung, wie sie durch die Ungleichung (39) verlangt wird. Oder schließlich könnte man die Frage mehr prinzipiell zu lösen versuchen, indem man das Dämpfungsglied in (27) für unrichtig erklärt und mit Planck die Existenz einer nicht strahlenden „Nullpunktbewegung“ zuläßt.

Über den allgemeinen Fall der unvollkommenen Resonanz mögen folgende Andeutungen genügen: Eine Befreiung des Elektrons ist hier bei beliebigem Betrage der Dämpfung immer möglich; die linke Seite von Gleichung (36) wächst nämlich wegen des Gliedes ε mit wachsendem ε beliebig an und kann daher den Wert der rechten Seite von (36) sicher erreichen. Ein hinreichend hoher Wert von ε bedeutet dabei wegen $\varepsilon = (n - n_0)\tau$ eine hinreichend lange Akkumulationszeit. Mit wachsendem ε nimmt aber die kinetische Energie, mit der das Elektron fortfliegt, immer mehr ab. Die rechte Seite von (37a) wird nämlich für große ε und τ näherungsweise gleich 2ε und Gleichung (37) liefert dann

$$T = \frac{\nu_0 h}{1 + 2\varepsilon}.$$

Die lichtelektrische Energie ist also bei großem ϵ gegenüber dem Werte $\nu_0 h$ stark reduziert. Beträge von der Ordnung $\nu_0 h$ sind nur bei kleinem ϵ und nur dann möglich, wenn die Dämpfung den in (39) angegebenen anomal kleinen Wert hat. Also:

Bei normaler Dämpfung treten lichtelektrische Energien von nennenswertem Betrage überhaupt nicht auf. Bei unter-normaler Dämpfung ist die lichtelektrische Energie im Resonanzfalle wieder genau gleich $\nu_0 h$.

Zweiter Teil.

Natürliches Licht.

§ 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit.

Die Überlegungen der vorigen Paragraphen haben gezeigt, daß unsere Grundhypothese der erreichbaren lichtelektrischen Energie eine obere Grenze steckt. Sie benutzen aber durchweg die in Wirklichkeit nicht erfüllte Fiktion einer Anregung mittels einer einzelnen periodischen Welle, und es bedarf daher noch der Untersuchung, ob das Endresultat auch dann noch aufrecht erhalten werden darf, wenn die Anregung nicht rein monochromatisch ist und die verschiedenen Wellenlängen der einzelnen Bestandteile der Strahlung so durcheinander gemischt sind, wie das bei der natürlichen Strahlung der Fall ist. Von vornherein ist ersichtlich, daß von einer absoluten Gültigkeit jenes Resultates nicht die Rede sein kann. Ist es doch ein leichtes, einen besonderen Fall zu konstruieren, in dem das Wirkungsintegral erst dann den Wert $h/2\pi$ erreicht, wenn die kinetische Energie längst über ein großes Vielfaches von $h\nu$ gestiegen ist. Dennoch werden wir zeigen können, daß unsere früheren Resultate als Mittelwerte auch bei natürlichem Licht Gültigkeit behalten.

Im folgenden denken wir uns die erregende Strahlung bestehend aus einem Gemisch zeitlich exponentiell gedämpfter Elementarwellen, deren elektrische Feldstärke an der Stelle des betrachteten Elektrons dargestellt sein möge, durch je eine Formel:

$$(40) \quad f(t) = E \cdot e^{-e(t-t_0)} \sin n_0(t-t_0),$$

welche gelten soll vom Moment $t = t_0$ an bis $t = \infty$. Wir machen also die Anfangsintensität aller Elementarwellen, welche durch die Konstante E gemessen wird, gleich groß; außerdem sei auch die Schwingungszahl n_0 für alle dieselbe und falle zusammen mit der Eigenschwingungszahl des erregten Elektrons. Die einzige Unregelmäßigkeit der Strahlung besteht dann darin, daß die Anfangszeiten t_0 unserer Wellen ganz regellos über die Zeit verteilt sind.

Daß die gleiche Wahl von E keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, dürfte a priori klar sein. Wir können ja mehrere t_0 einander gleichsetzen und dadurch ein Vielfaches von E erreichen. Daß auch die gleiche Wahl der Schwingungszahl in allen Elementarwellen unwesentlich ist, wird dadurch erreicht, daß wir die Dämpfung ϱ der Elementarwellen so groß wählen, daß die durch alle Einzelwellen zusammengenommen erzeugte Spektrallinie breit ist im Vergleich mit dem Spektralbereich, auf den unser Resonator praktisch anspricht.

Wir entwickeln nun $f(t)$ für die einzelne Elementarwelle in ein Fouriersches Integral (die Entwicklung in eine Fouriersche Reihe ist weniger zu empfehlen) nach dem Schema

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} da f(a) \cos p(t-a),$$

wofür wir bequemer schreiben können:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} da f(a) e^{ip(t-a)}.$$

Setzen wir aus (40) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip t} \int_{t_0}^{\infty} e^{-ip a} (e^{-\varrho(a-t_0)+i n_0(a-t_0)} - e^{-\varrho(a-t)-i n_0(a-t)}) da \\ &= \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip(t-t_0)} \left(\frac{1}{\varrho + i(p-n_0)} - \frac{1}{\varrho + i(p+n_0)} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Summation über alle t_i als Gesamtstrahlung:

$$(41) \quad \mathfrak{E} = \frac{E}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{q + i(p - n_0)} - \frac{1}{q + i(p + n_0)} \right) \sum_i e^{i p (t - t_i)}.$$

Das hierdurch dargestellte Spektrum ist natürlich um so schmaler (monochromatischer), je kleiner q und je kleiner die Zahl der auf die Zeiteinheit durchschnittlich entfallenden Zeitpunkte t_i ist. Bezüglich der Größe von q dürfen wir die folgenden beiden Festsetzungen machen:

$$(42) \quad q \ll n_0, \quad q\tau \gg 1.$$

Die erste besagt, daß jede Elementarwelle eine große Anzahl von Schwingungen der Frequenz n_0 ausführt, bevor sie auf $1/e$ gedämpft ist. Die zweite meint, daß für alle in Frage kommenden Akkumulationszeiten τ jede Einzelwelle vollständig abgedämpft ist.

Die von einer Elementarwelle herrührende Energiedichte am Orte unseres Resonators ist wegen der Gleichheit von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} :

$$u_i = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = f^2(t),$$

also das Zeitintegral derselben

$$\int_{t_i}^{\infty} u_i dt = \int_{t_i}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{E^2}{4q},$$

wie man leicht auf Grund des Ansatzes (40) mit Rücksicht auf die erste Bedingung (42) berechnet. Die von vielen solchen Elementarwellen herrührenden Energiebeträge superponieren sich durchschnittlich. Man erhält daher als mittlere Energiedichte U der Strahlung während einer Zeit τ , auf welche durchschnittlich S Elementarwellen entfallen, den Wert:

$$(43) \quad U = \frac{1}{\tau} \sum_i \int u_i dt = \frac{SE^2}{4q\tau}.$$

Wir bestimmen jetzt die Ausschwingung x unseres Elektrons als Funktion von t , welche unter dem Einfluß der durch (41) dargestellten Strahlung erfolgt, oder vielmehr zunächst diejenige Ausschwingung, welche einer Partialwelle

$$\mathfrak{E} = e^{i p t}$$

des Spektrums (41) entspricht. Wir gestatten uns dabei die Vereinfachung, daß wir das schwingende Elektron als dämpfungs-frei behandeln, legen also als Schwingungsgleichung zugrunde:

$$(44) \quad \ddot{x} + n_0^2 = \frac{e}{m} \mathcal{E} = \frac{e}{m} e^{i p t};$$

die Eigenschwingung des erregten Elektrons soll, wie schon gesagt, mit der Eigenschwingung n_0 der erregenden Partialwellen übereinstimmen. Das Integral von (44), welches den Anfangsbedingungen $x = \dot{x} = 0$ für $t = 0$ genügt, lautet:

$$(45) \quad x = -\frac{e}{m} x_p$$

mit der Abkürzung:

$$(45a) \quad x_p = \frac{e^{i p t}}{p^2 - n_0^2} - \frac{1}{2} \frac{e^{i n_0 t}}{n_0 (p - n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i n_0 t}}{n_0 (p + n_0)}.$$

Da unsere Schwingungsgleichung linear ist, erhält man die der Gesamterregung (41) entsprechende Ausschwingung aus (45) durch Multiplikation mit der betreffenden Amplitude der Partialschwingung und Integration über alle p ; also:

$$(46) \quad x = -\frac{e E}{4 \pi i m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{p + i(p - n_0)} - \frac{1}{p + i(p + n_0)} \right) x_p \sum e^{-i p t}.$$

Um jetzt die allgemeinen Formeln (a) und (b) der Einleitung anwenden zu können, die auch bei natürlichem Licht angenäherte Gültigkeit behalten werden, müßten wir uns zunächst mit den beiden Größen

$$\int_0^{\tau} x \mathcal{E} dt \quad \text{und} \quad \overline{x^2}$$

beschäftigen. Wir tragen ihre etwas mühsame Berechnung in § 9 nach und geben hier das Resultat an, das sich mit Rücksicht auf die Bedingungen (42) sehr einfach gestaltet, nämlich:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\tau} x \mathcal{E} dt &= \frac{e E^2}{4 m \varrho^2 n_0} \sum_1^S \sum_1^{s-1} \sin n_0 (t_s - t_r), \\ \overline{x^2} &= \frac{e^2 E^2}{8 m^2 \varrho^2 n_0^2} \sum_1^S \sum_1^S \cos n_0 (t_s - t_r). \end{aligned} \right.$$

Zur Interpretation der hier vorkommenden Doppelsummen denken wir uns etwa zwei quadratische Schemata von S Zeilen und S Kolonnen (S = Anzahl der auf das Zeitintervall τ entfallenden Einsätze t_s von Elementarwellen) und schreiben an die der s^{ten} Zeile und der r^{ten} Kolonne gemeinsame Stelle des ersten bzw. zweiten Schemas $\sin n_0(t_s - t_r)$ bzw. $\cos n_0(t_s - t_r)$. Im ersten Schema besteht dann die Diagonalreihe aus Nullen, im zweiten aus Einsen, im ersten sind je zwei symmetrisch zur Diagonalreihe gelegene Stellen mit dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Zahlen, im zweiten mit gleichen Zahlen ausgefüllt. Die Summe aller S^2 Zahlen des ersten Schemas wird daher gleich Null; erstrecken wir aber, wie in der ersten Zeile von (47) vorgesehen, die Summe nur über alle Zahlen links von der Diagonale, so ergibt sich ein im allgemeinen von Null verschiedener Wert, der, je nach der zufälligen Lage der Zeitpunkte t_s gegeneinander, selbst in hohem Maße dem Zufall unterworfen ist. Es ist bequem (vgl. den folgenden Paragraph) die Abkürzung einzuführen:

$$(48) \quad Si = \frac{2}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^{s-1} \sin n_0(t_s - t_r).$$

Bilden wir andererseits die Summe über alle S^2 -Zahlen unseres zweiten Schemas, wie in der zweiten Zeile von (47) vorgesehen, so besteht diese erstens aus den S Gliedern der Diagonalreihe von der festen Summe S und zweitens aus der dem Zufall unterworfenen Summe der Glieder links von der Diagonalreihe, welche doppelt zu zählen ist, da sie gleich ist der Summe der Glieder rechts von der Diagonalreihe. Führen wir die weitere Abkürzung ein

$$(48a) \quad Co = \frac{2}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{r=1}^{s-1} \cos n_0(t_s - t_r),$$

so ergibt sich als Summe aller Zahlen unseres zweiten Schemas

$$\sum_{s=0}^S \sum_{r=0}^S \cos n_0(t_s - t_r) = S(1 + Co)$$

und wir können unsere Gleichungen (47) auch so schreiben:

$$(49) \quad \begin{cases} \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt = \frac{e E^2 S}{8 m \varrho^2 n_0} Si, \\ \frac{1}{x^2} = \frac{e^2 E^2 S}{8 m^2 \varrho^2 n_0^2} (1 + Co). \end{cases}$$

Mit diesen Werten gehen wir in die Gleichung (a) und (b) des § 1 ein. Sie lauten dann bei Benutzung von (43):

$$(50) \quad \begin{cases} T = \nu_0 h + \frac{e^2 E^2 S}{16 m \varrho^2} Si = \nu_0 h + \frac{e^2 U \tau}{4 m \varrho} Si, \\ T = \frac{e^2 E^2 S}{16 m \varrho^2} (1 + Co) = \frac{e^2 U \tau}{4 m \varrho} (1 + Co). \end{cases}$$

Es sind also die von uns gesuchten Größen T und τ mit den beiden Zufallsgrößen Si und Co durch zwei lineare Gleichungen verknüpft und daher als statistisch bekannt anzusehen. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind bestimmt außer durch die Konstanten e , m , h durch die Energiedichte der erregenden Strahlung U , durch die Breite der erregenden Spektrallinie, welche durch die Dämpfungskonstante ϱ gemessen wird, endlich durch die Eigenschwingungszahl ν_0 des zu erregenden Resonators, welche gleich ist der mittleren Schwingungszahl der erregenden Spektrallinie.

§ 8. Die Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit.

Wir haben uns jetzt ein Urteil zu bilden über die Durchschnittswerte, welche bei zufälliger Verteilung der Zeitpunkte t , den Größen Si , Co oder ihren Quadraten zukommen, und über die Wahrscheinlichkeit eines irgendwie vorgegebenen Wertebereiches derselben. Wir behaupten in dieser Hinsicht:

$$(51) \quad \begin{cases} \overline{Si} = \overline{Co} = 0, \\ \overline{Si^2} = \overline{Co^2} = 1. \end{cases}$$

Die Überstreichung bedeutet dabei ersichtlich, daß wir die überstrichene Größe für sehr viele (unendlich viele) Verteilungen der S Zeitpunkte t_s , t_r über das Intervall τ bilden und das Mittel der so erhaltenen Zahlen nehmen sollen.

Die erste Zeile von (51) folgt unmittelbar daraus, daß die Größen $\frac{\sin}{\cos} n_0(t_s - t_r)$ negative und positive Werte mit

gleicher Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit annehmen. Die Richtigkeit der zweiten Zeile erkennt man so: Bildet man Si^2 , so kommen darin Quadrat- und Produktglieder vor. Der wahrscheinliche Wert der letzteren ist Null, der der ersteren $\frac{1}{2}$. Es gibt aber ebensoviel Quadratglieder wie es Stellen in unserem Schema links der Diagonale gibt, nämlich $S(S-1)/2$. Daher wird

$$\overline{Si^2} = \left(\frac{2}{S}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{S(S-1)}{2} = 1 \quad \text{für } S = \infty;$$

dasselbe gilt für Co^2 .

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Si einen Wert zwischen ξ und $\xi + d\xi$ bzw. Co einen Wert zwischen η und $\eta + d\eta$ habe, setzen wir jetzt nach dem Gaußsschen Fehlergesetz

$$(52) \quad w(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad w(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta.$$

In der Tat entspricht dieser Ansatz der Gleichung (51), da z. B. gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi w(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 w(\xi) d\xi = 1.$$

Jedenfalls kann das Gaußssche Gesetz in unserem Falle einer durchaus symmetrischen und regulären Dispersionskurve nicht merklich falsch sein.

Nach den Gleichungen (50) gehört nun zu jedem speziellen Werte der ξ, η ein bestimmter Wert von T und τ . Wir wollen aber statt mit T und τ lieber mit zwei unbenannten Zahlen rechnen, nämlich mit

$$(53) \quad x = \frac{T}{h\nu_0}, \quad y = \frac{\tau}{\Theta},$$

wobei die Hilfszeit Θ die Bedeutung haben soll:

$$(54) \quad \Theta = \frac{4 m \varrho h \nu_0}{e^2 U}.$$

Dann nehmen die Gleichungen (50) die folgende einfache Gestalt an:

$$(55) \quad \begin{cases} x - y\xi = 1, \\ x - y(1 + \eta) = 0. \end{cases}$$

Sie geben aufgelöst:

$$(56) \quad \begin{cases} \xi = \frac{x-1}{y}, & \eta = \frac{x}{y} - 1, \\ x = \frac{1+\eta}{1-\xi+\eta}, & y = \frac{1}{1-\xi+\eta}. \end{cases}$$

Wir stellen uns nun eine ξ, η -Ebene und eine xy -Ebene vor, deren Punkte durch die Gleichungen (55) aufeinander bezogen sind. In der $\xi \eta$ -Ebene grenzen wir uns um einen Punkt $\xi \eta$ einen Spielraum $d\xi d\eta$ ab; die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig herausgegriffenes Wertepaar $\xi \eta$ in diesen Spielraum fällt, ist nach (52):

$$(57) \quad w(\xi)w(\eta)d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} d\xi d\eta.$$

Andererseits betrachten wir in der xy -Ebene einen Punkt xy mit Spielraum $dx dy$; die Wahrscheinlichkeit, daß ein durch Zufall bestimmtes Wertepaar xy in diesen Spielraum fällt, werde bezeichnet mit $W(x, y) dx dy$. Wir behaupten dann:

$$(58) \quad W(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right| e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}} dx dy.$$

Zum Beweise brauchen wir uns nur die Größe desjenigen Bereiches der $\xi \eta$ -Ebene zu vergegenwärtigen, der dem Bereiche $dx dy$ vermöge (56) zugeordnet ist. Er ist offenbar ein Parallelogramm von dem Inhalt $dx dy$ mal der in (58) hingeschriebenen Funktionaldeterminante, welche letztere uns den Vergrößerungsfaktor unserer Abbildung und zugleich die Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes beim Übergang von der Ebene $\xi \eta$ zu xy liefert. Die Wahrscheinlichkeit nämlich, daß xy im Spielraum $dx dy$ liege (linke Seite von (58)) ist ebenso groß wie die, daß der Bildpunkt $\xi \eta$ von xy in dem soeben bestimmten zugeordneten Bereiche der $\xi \eta$ -Ebene liege. Dessen Größe ist also für $d\xi d\eta$ auf der rechten Seite von (57) zu substituieren, wodurch sich die rechte Seite von (58) ergibt, also unsere Behauptung verifiziert ist.

Setzen wir aus (56) in (58) ein, so folgt

$$(59) \quad W(x, y) = \frac{1}{2\pi y^2} e^{-\varphi}, \quad \varphi = \frac{(x-1)^2 + (x-y)^2}{2y^2}.$$

Von der Wahrscheinlichkeit eines Wertepaares x, y können wir nun zu den Wahrscheinlichkeiten eines Einzelwertes x oder y übergehen. Wir haben letztere Größen offenbar so zu definieren:

$$(60) \quad \begin{cases} W(x) = \int_0^{\infty} W(x, y) dy = \int_0^{\infty} \frac{dy}{2\pi y^3} e^{-\varphi}, \\ W(y) = \int_0^{\infty} W(x, y) dx = \frac{1}{2\pi y^3} \int_0^{\infty} dx e^{-\varphi}. \end{cases}$$

Es bedeutet also $W(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit für eine lichtelektrische Befreiung, bei der das Elektron mit einer Energie zwischen $T = h\nu_0 x$ und $T + dT = h\nu_0(x + dx)$ fortfliegt (vgl. Gleichung (53)), nach ganz beliebiger Akkumulationszeit; und es bedeutet $W(y)dy$ die Wahrscheinlichkeit einer Auslösung, bei der die Zeit der Auslösung liegt zwischen $\tau = \Theta y$ und $\tau + d\tau = \Theta(y + dy)$ bei übrigens ganz beliebiger und unbeschränkter Energie des fortfliegenden Elektrons.

Die Ausrechnung beider Formeln (60) läßt sich auf das Fehlerintegral

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$$

zurückführen. Es wird nämlich einfach:

$$(61) \quad \begin{cases} W(x) = \frac{u^2}{x^2} \left\{ \frac{1}{\pi\sqrt{e}} + \frac{u}{\sqrt{\pi}e} e^{u^2} (1 + \Phi(u)) \right\}, & u = \frac{x}{2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}}, \\ W(y) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}y^3} e^{-\left(\frac{y-1}{2y}\right)^2} \left(1 + \Phi\left(\frac{y+1}{2y}\right) \right). \end{cases}$$

An Hand der Fig. 5a und 5b kann man nun alle Fragen beantworten, die man über die Verteilung der lichtelektrischen Energie und der Akkumulationszeit stellen mag. Z. B.:

Der wahrscheinlichste Wert der lichtelektrischen Energie (Maximum der Kurve $W(x)$) liegt etwa bei $x = 0,7$. Er beträgt also (vgl. Gleichung (53))

$$T = 0,7 \cdot h\nu_0.$$

Der wahrscheinlichste Wert der Akkumulationszeit (Maximum der Kurve $W(y)$) liegt bei $y = 0,4$. Er beträgt also (vgl. Gleichung (53)):

$$\tau = 0,4 \cdot \Theta.$$

Der „wahrscheinliche“ Wert von Energie und Akkumulationszeit, d. h. derjenige Wert, der ebensooft über- wie unterschritten wird, der sich also durch Halbierung der Flächen

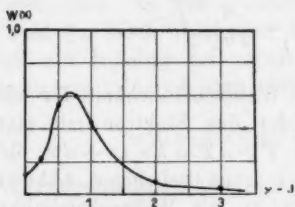


Fig. 5 a.

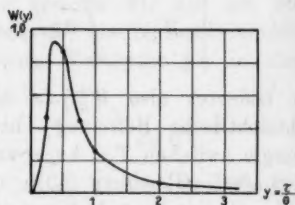


Fig. 5 b.

bestimmt, ist für beide Kurven wenig kleiner als 1. Man hat daher für diese Werte:

$$T \cong h\nu_0, \quad \tau \cong \Theta.$$

Ebenso könnte man die mittleren Werte von T und τ bestimmen und würde für diese ebenfalls die Größenordnung $h\nu_0$ bzw. Θ finden.

Die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine lichtelektrische Emission zustande kommt, d. h. ein positives T bei positivem τ , ist gleich dem Inhalte der einen oder dem gleich großen Inhalte der anderen Kurve, nämlich:

$$\int_0^{\infty} W(x) dx = \int_0^{\infty} W(y) dy = 0,7.$$

Also nur 70 Proz. aller Fälle, die durch ganz beliebige Verteilung der Zeitpunkte t_i auf das Intervall τ gegeben sind, führen zu lichtelektrischer Aktivität, 30 Proz. nicht.

Von Wichtigkeit ist folgender Punkt: unsere Kurven liefern keine bestimmte obere Grenze für den Höchstwert der lichtelektrischen Energie, sondern geben eine Streuung, bei der beliebig große Werte x vorkommen können, wenn auch mit verschwindender Wahrscheinlichkeit. Wir betrachten in

dieser Hinsicht zwei Grenzfälle, welche folgendermaßen zustande kommen. Entweder dadurch, daß der Nenner $1 - \xi + \eta$ in (56) sehr klein wird. Dann wird gleichzeitig der zugehörige Wert von y , also auch die Akkumulationszeit sehr groß. Wir haben dann einen der im Anfang von § 7 genannten Fälle, wo die Energie des Resonators immer weiter ansteigt, ohne daß nach unserer Grundhypothese die Bedingung für die Befreiung des Elektrons erfüllt ist. Indem man andererseits die Länge der Akkumulationszeit nach den Umständen des Versuches begrenzt, kann man auch beliebig große Werte der Energie, die sich aus diesem Umstande ergeben, ausschließen. Oder wir haben einen anderen Grenzfall, welcher dadurch zustande kommt, daß der Zähler $1 + \eta$ in Gleichung (56) sehr groß wird. Der absolut größte Wert, den η annehmen kann, tritt offenbar dann ein, wenn in (48a) alle \cos gleich 1, also alle $n_0(t_s - t_r)$ gleich einem ganzen Vielfachen von 2π werden. In diesem Falle folgen die Zeitpunkte t_s einander sozusagen im Takt, nämlich immer nach einem ganzen Vielfachen der Eigenschwingungsdauer $2\pi/n_0$ des Resonators. Eine derart geregelte (nicht mehr natürliche) Strahlung hat dieselbe Wirkung wie ein geregelter monochromatischer Wellenzug. In der Tat ist jetzt nach (48), (48a) und (56)

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{2}{S} \frac{S(S-1)}{2} = S - 1 = \infty,$$

also

$$x = 1, \quad y = 0.$$

Nun bedeutet $x = 1$ nach (53) $T = h\nu_0$, also den früher gefundenen Wert im monochromatischen Resonanzfalle. Andererseits bedeutet $y = 0$ nach (53), daß $\tau \ll \Theta$ wird; auch dieses ist im Einklang mit dem früher in Gleichung (14) gefundenen Wert von τ für monochromatisches Licht, wie man leicht auf Grund des Wertes (54) von Θ bestätigt. Auch versteht man ohne weiteres, daß bei derartig geregelter Energiezufuhr die Akkumulation der Energiemenge $h\nu_0$ viel schneller beendet ist, wie bei unregelter, natürlicher Strahlung, wo sie durchschnittlich die Zeit Θ erfordert. Offenbar kommt dem jetzt betrachteten Grenzfalle, wie überhaupt den im ersten Teil untersuchten Fällen, von unserem jetzigen Standpunkte aus wieder nur eine verschwindende Wahrscheinlichkeit zu.

§ 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale.

Es handelt sich hier um den Beweis der beiden schon benutzten Formeln (47). Wir untersuchen also zunächst das Integral

$$J = \int_0^{\tau} x \mathfrak{E} dt;$$

indem wir uns auf die Formeln (41) und (46) stützen, haben wir

$$\begin{aligned} J &= \frac{e E^2}{16 \pi^2 m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{1}{q + i(p - n_0)} - \frac{1}{q + i(p + n_0)} \right) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left(\frac{1}{q + i(q - n_0)} - \frac{1}{q + i(q + n_0)} \right) \\ &\quad \times \int_0^{\tau} x_q \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{i p t - i p t_s - i q t_r} dt. \end{aligned}$$

Hierbei mußte die Integrationsvariable und der Summationsindex der Gleichung (46), die dort ursprünglich mit p und s bezeichnet waren, in q und r verändert werden, um sie von den entsprechenden Größen der Gleichung (41) zu unterscheiden. Das Integral nach t , das wir mit J' bezeichnen, läßt sich ausführen. Es wird nämlich vermöge der Definition von x_q in Gleichung (45a):

$$\begin{aligned} J' &= \frac{1}{i} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r} \left\{ \frac{e^{i(p+q)\tau} - 1}{(p+q)(q^2 - n_0^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p+n_0)\tau} - 1}{(p+n_0)n_0(q-n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0(q+n_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun je nach dem Vorzeichen von p und q vier Teile von J , die wir schematisch andeuten durch

$$(+ +), (+ -), (- +), (- -).$$

Hier bedeutet z. B. $(+ -)$, daß wir die Integration nach p von 0 bis $+\infty$, diejenige nach q von $-\infty$ bis 0 führen; entsprechende Bedeutung sollen die anderen drei Zeichen haben.

Bei der Ausrechnung können wir einige Vernachlässigungen machen. Zunächst ist die Frequenz n_0 eine sehr große Zahl (in sec^{-1} ausgedrückt); aber auch die Integrationsvariablen

p und q dürfen als große Zahlen derselben Größenordnung angesehen werden, da unser Spektrum nur in der Umgebung der Stelle n_0 merkliche Intensität hat. Andererseits ist q im Verhältnis zu n_0 eine kleine Zahl. Im Falle $(+ -)$ können wir daher

$$\frac{1}{q + i(p + n_0)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q + i(q - n_0)}$$

vernachlässigen gegen

$$\frac{1}{q + i(p - n_0)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q + i(q + n_0)}.$$

Aus demselben Grunde können wir bei J' das mittlere Glied der $\{\}$ streichen gegen die beiden anderen. Wir erhalten daher näherungsweise

$$(+ -) = \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dq}{q + i(q + n_0)}$$

$$\sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r} \frac{1}{q + n_0} \left\{ \frac{e^{i(p+q)\tau} - 1}{(p+q)(q-n_0)} + \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0} \right\}.$$

oder

$$(61) \left\{ \begin{aligned} (+ -) &= \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \\ \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r} &\frac{1}{q - n_0} \left\{ \frac{e^{i(p-q)\tau} - 1}{(p-q)(q+n_0)} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau} - 1}{(p-n_0)n_0} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Behandelt man die Kombination $(- +)$ genau ebenso, wobei aber jetzt in der $\{\}$ von J' der dritte Term gegen den ersten und zweiten zu streichen ist, so erhält man genau den konjugierten Wert zu $(+ -)$. Ferner erkennt man ebenso, daß mit derselben Annäherung zu setzen ist:

$$(+ +) = (- -) = 0.$$

Während nämlich z. B. bei $(+ -)$ von den Faktoren der Nenner in den beibehaltenen Gliedern der $\{\}$ zwei klein und nur je einer groß sind, sind z. B. bei $(+ +)$ in allen drei Gliedern je zwei dieser Faktoren groß und nur einer klein. Man hat daher im ganzen einfach

$$(62) \quad J = 2\Re(+ -),$$

unter \Re den Übergang zum reellen Teil verstanden. Es

handelt sich also nur noch um die näherungsweise Auswertung des Doppelintegrals (61).

Wir bezeichnen das nach q genommene Integral mit Q und zerlegen dieses in vier Teile:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

wobei z. B. sein soll

$$(63) \quad \begin{cases} Q_1 = \int_0^{\infty} \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r} \frac{e^{i(p-q)\tau}}{(q - n_0)(p - q)(q + n_0)}, \\ Q_2 = - \int_0^{\infty} \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r} \frac{1}{(q - n_0)(p - q)(q + n_0)}. \end{cases}$$

Die Integration nach q ist ursprünglich längs der positiven reellen Achse in einer q -Ebene zu erstrecken. Auf dieser liegen zwei Nullstellen der Nenner des Integranden, nämlich

$$q = n_0, \quad q = p.$$

Diese Stellen sind aber nicht etwa Unendlichkeitsstellen des Integranden von Q , da z. B. für $q = n_0$ die $\{\}$ in (61) und für $q = p$ der Zähler im ersten Term dieser $\{\}$ verschwindet. Man kann daher, ohne etwas an Q zu ändern, den Weg längs der reellen Achse nach Art der Fig. 6a in einen komplexen Weg deformieren, der den Stellen $q = n_0$ und $q = p$ aus dem Wege geht, und man muß dieses tun, wenn anders die Teilintegrale Q_1, Q_2, \dots einen Sinn haben sollen. Ob wir dabei nach der positiv-imaginären Halbebene, wie in Fig. 6a angenommen, oder nach der negativ-imaginären ausweichen, ist gleichgültig, nur muß es konsequent, d. h. für alle vier Teilintegrale in gleicher Weise geschehen.

Wir deformieren jetzt den Integrationsweg in Q_1 weiter. Der Exponentialfaktor in Q_1 ist, soweit er von q abhängt:

$$e^{-i q(x - t_r)}.$$

Da $\tau - t_r > 0$, verschwindet er im Unendlichen der negativ-imaginären Halbebene. Wir ziehen den Integrationsweg daher nach dieser Halbebene hinüber bis an die negativ-imaginäre Achse heran, wobei er mit je einer Schleife im Punkte $q = p$ und $q = n_0$ hängen bleibt, und finden

$$Q_1 = Q_i + Q_{n_0} + Q_p;$$

dabei bedeutet Q_i die Integration längs der negativ-imaginären Achse, Q_{n_0} das Residuum von Q_1 im Punkte n_0 , Q_p dasjenige im Punkte p . Q_i ist sehr klein, da alle drei Faktoren im Nenner von Q_1 längs der imaginären Achse Zahlen von sehr großem absoluten Betrage sind. Es ist daher nach den voran-

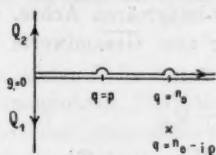


Fig. 6 a.

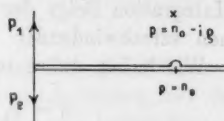


Fig. 6 b.

gegangenen Vernachlässigungen nur konsequent, auch Q_i zu streichen.

Ferner ergibt sich nach der Residuenregel

$$(64) \begin{cases} Q_{n_0} = \frac{-2\pi i}{q} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i n_0 t_r} \frac{e^{i(p-n_0)\tau}}{(p-n_0)2n_0}, \\ Q_p = \frac{+2\pi i}{q-i(p-n_0)} \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i p t_r} \frac{1}{(p-n_0)(p+n_0)}. \end{cases}$$

Eigentlich wäre noch ein drittes Residuum zu berücksichtigen, nämlich für die Nullstelle des Nenners $q-i(q-n_0)$, welche in der negativ-imaginären Halbebene bei

$$q = n_0 - i q$$

liegt. Das zugehörige Residuum würde aber den Exponentialfaktor

$$e^{-i(n_0-iq)(\tau-t_r)} = e^{-i n_0(\tau-t_r)} e^{-q(\tau-t_r)}$$

enthalten, welcher sehr klein ist, da $q\tau$ und im allgemeinen auch $q(\tau-t_r)$ sehr große Zahlen sind. Wir können daher hier und im folgenden von Termen dieses Ursprungs absehen und haben einfach

$$Q_1 = Q_{n_0} + Q_p.$$

Behandeln wir in gleicher Weise die übrigen Teilintegrale Q_2, \dots , so finden wir sofort:

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0.$$

Dieselben enthalten nämlich sämtlich als Exponentialfaktor, soweit er von q abhängt, die Größe

$$e^{i q t_r},$$

welche im Unendlichen der positiv-imaginären Halbebene verschwindet. Hier haben wir also den Integrationsweg nach dieser Halbebene herüberzuziehen; dabei treten keine Residuen auf nach Maßgabe des in Fig. 6a gewählten ursprünglichen Weges. Alle drei Teilintegrale lassen sich daher überführen in die Integration längs der positiv-imaginären Achse, welche nur einen verschwindenden Beitrag zum Gesamtwerte von Q liefert. Wir haben daher im ganzen

$$Q = Q_1 = Q_{n_0} + Q_p.$$

Es bleibt noch das Integral nach p auszuführen, das wir mit P bezeichnen und in zwei Teilintegrale zerlegen:

$$(65) \quad P_1 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} Q_{n_0}, \quad P_2 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\varrho + i(p - n_0)} Q_p.$$

In beiden verschwindet der Nenner (vgl. Gleichung (64)) für $p = n_0$, so daß die Integration längs der reellen Achse für diese Teilintegrale sinnlos wird. Dagegen ist die Summe beider $P = P_1 + P_2$ an der Stelle $p = n_0$ regulär, indem nach (64) gilt:

$$(p - n_0)(Q_{n_0} + Q_p) = 0 \quad \text{für} \quad p = n_0.$$

Wir haben daher ebenso wie oben zu verfahren, nämlich die reelle Integration in eine komplexe zu deformieren, die dem Punkte $p = n_0$ z. B. nach der Seite der positiv-imaginären Halbebene der p ausweicht (Fig. 6b).

Das Teilintegral P_1 hat nun (vgl. die erste Zeile von (64)) den Exponentialfaktor

$$e^{ip(x-t)}.$$

Dieser verschwindet in der positiv-imaginären Halbebene, nach der wir P_1 hinüberziehen. Daher bleibt nur die Integration längs der positiv-imaginären Achse übrig, welche einen verschwindenden Beitrag liefert, und es ergibt sich näherungsweise

$$P_1 = 0,$$

da auch das Residuum wegen des in der positiv-imaginären Halbebene verschwindenden Nenners $\varrho + i(p - n_0)$ wie oben vernachlässigt werden kann.

Dagegen lautet der Exponentialfaktor von P_2 (vgl. die zweite Zeile von (64)):

$$e^{-ip(t_s - t_r)}.$$

Hier haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, $t_r > t_s$ und $t_r < t_s$, oder, da wir uns die t_p der Größe nach geordnet denken:

$$r > s \text{ und } r < s.$$

Im ersten Falle verschwindet der Exponentialfaktor in der positiv-imaginären Halbebene. Deshalb liefern bei der Deformation des Integrationsweges alle $r > s$ keinen Beitrag zum Integral P_2 . Dagegen haben wir im zweiten Falle nach der negativ-imaginären Halbebene der p zu gehen und das Residuum im Punkte $p = n_0$ zu beachten. Dieses lautet in der Summe für alle $r < s$:

$$(65) \quad P_2 = \frac{2\pi^2}{q^2 n_0} \sum_{s=1}^s \sum_{r=1}^s e^{-in_0(t_s - t_r)}.$$

Schließlich haben wir nach Gleichung (61)

$$(+ -) = \frac{-e E^2}{16 \pi^2 i m} P_2$$

und erhalten nach Gleichung (62) und (65):

$$(66) \quad J = \frac{e E^2}{4 m q^2 n_0} \sum_{s=1}^s \sum_{r=1}^s \sin n_0(t_s - t_r).$$

Dies ist die erste der zu beweisenden Gleichung (47); in (47) ist übrigens die Summe nach r nur bis $s-1$ geführt, da ja der \sin für $s=r$ ohnehin verschwindet.

Wir wenden uns jetzt zum Beweis der zweiten Gleichung (47). Im Anschluß an (46) ist x^2 zunächst als Doppelintegral nach p, q und Doppelsumme nach s, r zu schreiben; \bar{x}^2 entsteht dann aus x^2 durch zeitliche Mittelung über das Intervall einer (oder einiger) Schwingungen zur Zeit $t = \tau$. Wir zerlegen \bar{x}^2 wieder in die vier Kombinationen nach den Vorzeichen von p und q :

$$(67) \quad \bar{x}^2 = (++) + (+-) + (-+) + (--).$$

Mit den oben begründeten Vernachlässigungen ergibt sich nach (46):

$$\begin{aligned}
 (+ -) &= \frac{e^3 E^2}{16 \pi^2 m^2} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dq}{q + i(q + n_0)} \overline{x_p x_q} \\
 &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s - i q t_r}, \\
 &= \frac{e^3 E^2}{16 \pi^2 m^2} \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \overline{x_p x_{-q}} \\
 &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r}.
 \end{aligned}$$

Auch in dem Produkte $x_p x_{-q}$ sind einige Terme zu vernachlässigen. Dasselbe besteht nach (45a) aus Termen, welche bzw. mit den Exponentialfaktoren behaftet sind:

$$\begin{aligned}
 &e^{i(p-q)t}, \quad e^{i(p+n_0)t}, \quad e^{i(p-n_0)t}, \\
 &e^{i(n_0-q)t}, \quad e^{-i(n_0+q)t}, \quad e^{2i n_0 t}, \quad e^{-2i n_0 t}
 \end{aligned}$$

und zwei Termen mit dem Faktor

$$e^{i(n_0 - n_0)t} = 1.$$

Von diesen Exponentialfaktoren sind nun der zweite und die drei letzten schnell veränderlich nach t und geben daher bei der Mittelung nach t Null. In den übrigen kann die Mittelung dadurch ausgeführt werden, daß $t = \tau$ gesetzt wird. Man hat daher, ausführlich geschrieben:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{x_p x_{-q}} &= \frac{e^{i(p-q)\tau}}{(p^2 - n_0^2)(q^2 - n_0^2)} - \frac{1}{2} \frac{e^{i(p-n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2)n_0(q - n_0)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{e^{i(n_0-q)\tau}}{(q^2 - n_0^2)n_0(p - n_0)} + \frac{1}{4} \frac{1}{(p - n_0)(q - n_0)n_0^2} \end{aligned} \right.$$

unter Weglassung eines zweiten mit dem Faktor 1 behafteten Termes, der an Stelle von $(p - n_0)(q - n_0)$ im Nenner $(p + n_0)(q + n_0)$ hat und daher gegen den hingeschriebenen relativ klein ist.

Untersucht man in gleicher Weise und in gleicher Näherung die Kombination $(- +)$, so findet man sie zu $(+ -)$ konjugiert. Also

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} &(+ -) + (- +) \\ &= \frac{e^3 E^2}{8 \pi^2 m^2} \Re \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q - i(q - n_0)} \overline{x_p x_{-q}} \\ &\quad \sum_{(s)} \sum_{(r)} e^{-i p t_s + i q t_r}. \end{aligned} \right.$$

Entsprechend lassen sich die beiden Kombinationen $(++)$ und $(--)$ zusammenziehen zu

$$(69a) \quad \left\{ \begin{aligned} & (++) + (--) \\ &= \frac{e^2 E^2}{8 \pi^2 m^2} \Re \int_0^\infty \frac{dp}{q + i(p - n_0)} \int_0^\infty \frac{dq}{q + i(q - n_0)} \overline{x_p x_q} \\ & \quad \sum \sum e^{-ip t_s - i q t_r}, \end{aligned} \right.$$

wobei aber jetzt bedeutet

$$(68a) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{x_p x_q} &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(p - n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2) n_0 (q + n_0)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(p - n_0) n_0^2 (q + n_0)} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^{i(q - n_0)\tau}}{(q^2 - n_0^2) n_0 (p + n_0)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(q - n_0) n_0^2 (p + n_0)}. \end{aligned} \right.$$

Wir berechnen zunächst (69), bezeichnen das dort vorkommende Integral nach Q , zerlegen es in vier Teile

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

entsprechend den vier Bestandteilen von (68), verlegen den Integrationsweg ins Komplexe entsprechend Fig. 6a und verfahren ganz analog wie früher. Es mögen in dieser Hinsicht die folgenden Andeutungen genügen:

Q_1 . Übergang in die negativ-imaginäre Halbebene, Residuum im Punkte $q = n_0$:

$$Q_1 = - \frac{2 \pi i}{q} \frac{e^{i(p - n_0)\tau}}{(p^2 - n_0^2) 2 n_0} \sum_s \sum_r e^{-ip t_s + i n_0 t_r}.$$

Q_2 . Übergang ins Unendliche der positiv-imaginären Halbebene:

$$Q_2 = 0.$$

Q_3 . Übergang zur negativ-imaginären Halbebene. Residuum für $q = n_0$:

$$Q_3 = \frac{2 \pi i}{q} \frac{1}{4 n_0^2 (p - n_0)} \sum_s \sum_r e^{-ip t_s + i n_0 t_r}.$$

Q_4 . Übergang nach der positiven Halbebene:

$$Q_4 = 0.$$

Durch Integration nach p im Sinne der Gleichung (69) entstehen aus Q_1 und Q_3 die beiden Integrale:

$$P_1 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{q + i(p - n_0)} Q_1, \quad P_3 = \int_0^{\infty} \frac{dp}{q + i(p - n_0)} Q_3.$$

Integrationsweg wie in Fig. 6b. Bei P_1 nach der positiv-imaginären p -Halbebene zu deformieren. Daher

$$P_1 = 0.$$

Bei P_3 nach der negativen. Residuum für $p = n_0$. Daher

$$P_3 = - \frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{2\pi i}{q} \frac{1}{4n_0^2} \sum^{(s)} \sum^{(r)} e^{-i n_0(t_s - t_r)}.$$

Also nach (69):

$$(70) \quad (+ -) + (- +) = \frac{e^2 E^2}{8 m^2 q^2 n_0^2} \sum_1^S \sum_1^S \cos n_0(t_s - t_r).$$

Rechnet man ebenso (69a) aus, indem man die Integration nach q entsprechend den vier Termen von (68a) zerlegt in Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , so ergibt sich

$Q_1 = Q_2 = 0$, weil bei der Deformation des Integrationsweges nach der negativ-imaginären Halbebene keine singuläre Stelle überschritten wird.

$Q_3 = 0$, weil der Weg nach der positiven Halbebene herüberzuziehen ist.

$$Q_4 = \frac{2\pi i}{4q n_0^2(p + n_0)} \sum^{(s)} \sum^{(r)} e^{-i p t_s - i n_0 t_r}.$$

Integriert man aber diesen Ausdruck wie in Gleichung (69a) vorgesehen, nach p , so tritt keine singuläre Stelle auf, an der bei der Deformation der Integrationsweg hängen bliebe. Deshalb wird in unserer Näherung

$$(+ +) + (- -) = 0.$$

Nach (67) ist also \bar{x}^2 gleich dem in (70) berechneten Ausdruck und dieser erweist sich als identisch mit der zweiten der zu beweisenden Gleichung (47).

§ 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung.

Die Meinung liegt uns sehr ferne, als ob es in Wirklichkeit beim Photoeffekt genau nach unserer Grundhypothese

zuginge. Wir möchten diese Hypothese nur ansehen als Ersatz eines Atommodelles, gewissermaßen selbst als ein analytisches Modell der Haupteigenschaften des Atoms, welches wegen seiner größeren Allgemeinheit und Vorsichtigkeit vielleicht mehr Vertrauen verdient, als die spezielleren Konstruktionen des Atoms aus Massen, Ladungen, Bewegungen.

Die Haupteigenschaft unseres analytischen Mechanismus ist diese: das Atom ist ein in sich abgeschlossenes System, welches aus den umgebenden Feldern mittels eines resonierenden Elektrons Energie aufspeichern kann. Wann diese Abgeschlossenheit durchbrochen wird und aus dem Atominnern Energie nach außen abgegeben wird, bestimmt die Konstante h . Die physikalische Bedeutung von h wäre hiernach die, daß h bestimmt, wann eine quasielastische Bindung gesprengt oder ein Ventil am Atom geöffnet wird. Von der eventuellen Strahlungsdämpfung abgesehen, geschieht vermöge dieser Ventilwirkung die Energieabgabe diskontinuierlich und quantenhaft.

Eine gewisse Ähnlichkeit unserer Anschauung mit der neuen Strahlungshypothese von Planck (kontinuierliche Absorption, quantenhafte Emission) liegt auf der Hand, abgesehen von dem Umstande, daß die Plancksche Hypothese die Emission von Wellenstrahlung, die unserige die von Korpuskularstrahlung regulieren soll. Aber es bestehen auch sehr wesentliche Unterschiede: Planck operiert mit Energiequanten $h\nu$, wir allein mit dem Wirkungsquantum h ; bei Planck ist der Emissionsvorgang durch Wahrscheinlichkeit bestimmt, bei uns ist er durch unsere Grundhypothese genau determiniert, nur die Unkenntnis des wirksamen optischen Feldes bringt bei uns das statistische Element herein, während bei Planck das statistische Element bereits in den Resonator und seine Neigung zur Emission verlegt wird; bei Planck schwankt die (Strahlungs-)Energie nur zwischen den Werten $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$..., bei uns streut die (Korpuskular-)Energie kontinuierlich, z. B. um den Mittelwert $h\nu$ im Resonanzfalle; bei Planck ist die Dämpfung prinzipiell, bei uns nur opportunistisch ausgeschlossen. Übrigens ist natürlich das Problem, das Planck stellt und löst, die Ableitung der Strahlungsgesetze, ein viel tieferes und schwierigeres als das unserige.

Einstein hat gelegentlich¹⁾ die Schwierigkeiten der Photoelektrizität und der verwandten Gebiete folgendermaßen charakterisiert:

„Man sieht nach unseren (gewöhnlichen elektromagnetischen) Vorstellungen nicht ein, warum Strahlung höherer Frequenz Elementarprozesse von größerer Energie zu erzeugen vermag als solche niedrigerer Frequenz. Wir begreifen weder die spezifische Wirksamkeit der Frequenz, noch den Mangel an spezifischer Wirksamkeit der Intensität.“

Wir können sagen, daß gerade diese Schwierigkeiten zu heben unsere Grundhypothese da ist, daß sie nämlich zeigt, wie eine „spezifische Wirksamkeit der Frequenz und eine Unwirksamkeit der Intensität“ gedacht werden kann, ohne die Energie selbst quantenhaft zu unterteilen.

Neben dieser Haupteigenschaft unseres Atommodelles sei auch darauf hingewiesen, daß unsere Grundhypothese für die maximale Ausschwingung des Elektrons kurz vor der Befreiung, Gleichung (15), eine charakteristische (von der Intensität des Lichtes unabhängige, universell durch die Frequenz bestimmte) Größe ergibt, die sich gut an die bekannte Größe der molekularen Wirkungssphäre anschließt. Die Ausdehnung der Atome erscheint hiernach gewissermaßen als eine Funktion von h , nämlich als diejenige Länge, über welche hin vermöge unserer h -Hypothese das Atom seine Elektronen noch zusammenhalten kann.

Auf eine Erklärung der Eigenfrequenz n_0 des Atoms haben wir verzichtet. Diese liegt ersichtlich außerhalb unserer h -Hypothese und erfordert speziellere Vorstellungen über den Atombau. Wir können dieserhalb auf F. A. Lindemann verweisen, der sowohl von der Vorstellung zentraler Coulombscher Kräfte wie quasielastischer Kräfte zu einer Formel gelangt ist, die meist sehr gut mit der Erfahrung beim selektiven Photoeffekt stimmt.²⁾

Besonderen Nachdruck möchten wir auf den Begriff der *Akkumulationszeit* legen, um so mehr, als wir, wie es scheint,

1) A. Einstein, Congrès Solvay 1911, p. 430. Paris 1912.

2) A. F. Lindemann, Congrès Solvay 1911, p. 392, Paris 1912; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 13. p. 482. 1911.

demnächst wertvolles experimentelles Material¹⁾ zur Beurteilung dieser Frage haben werden. Da unsere Theorie die Energie des lichtelektrischen Effektes auf ganz natürliche Weise aus der Energie der primären Strahlung entnehmen läßt, so ist dazu eine endliche Zeit erforderlich. Der umgekehrte Standpunkt wäre der, daß die Energie des lichtelektrischen Effektes aus dem Atom stammt, daß die auffallende Strahlung nur auslösend wirkt, und daß ihre Energie nur dazu benutzt wird, um die in der Atomenergie entstandenen Defekte wieder aufzufüllen. Eine Entscheidung zwischen beiden Standpunkten ist nur dadurch möglich, daß die Konsequenzen beider Auffassungen gezogen und mit dem Experiment verglichen werden. Wir stellen daher hier zusammen, was unsere Auffassung über die Akkumulationszeit ergibt.

a) *Die Größe der Akkumulationszeit.* Die mittlere Länge der Akkumulation wird bestimmt durch Gleichung (54) und beträgt:

$$\Theta = \frac{4 \pi q h r_0}{e^2 U}.$$

q war die Abklingungskonstante der auffallenden Wellenzüge (Dimension sec^{-1}) und ist proportional mit der Breite der Spektrallinie, die zur Erregung dient. Wir entnehmen q aus der gewöhnlichen elektromagnetischen Dämpfung und beachten, daß wegen der Zusammenstöße das wirkliche q einige Male größer sein kann, wie das so berechnete. Nach Gleichung (30) zusammen mit (29b) und (29) ist die Abklingungskonstante eines lediglich elektromagnetisch gedämpften Elektrons (in Gleichung (30) mit $\rho_0 n_0$ bezeichnet)

$$\frac{1}{2} \frac{e^2 n_0^2}{6 \pi c^3 m} = \frac{\pi e^2 r_0^2}{3 c^3 m},$$

so daß wir Θ auch schreiben können

$$\Theta = \frac{4 \pi}{3} \frac{h r_0^3}{U c^3} = \frac{4 \pi}{3} \frac{h}{U \lambda_0^3}.$$

Θ ist also im wesentlichen gleich h , geteilt durch die im Wellenlängenkubus enthaltene Energie.

1) Wir meinen die der Münchener Akademie vorgelegte, im Druck befindliche Arbeit von Joffé und die der Schweizer Naturforschergesellschaft vorgeführte Untersuchung von Edgar Meyer.

Die letztere entnehmen wir z. B. aus Beobachtungen¹⁾ von Fabry und Buisson. Nach diesen strahlt die grüne Quecksilberlinie einer Heraeuslampe ($\lambda_0 = 5460 \cdot 10^{-8}$) im Abstände 1 m auf den Quadratcentimeter

$$E = 0,583 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} = 58,3 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}.$$

Die Energiedichte im gleichen Abstände ist

$$U = \frac{E}{c} = 19,4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}$$

und die Energie im Wellenlängen kubus

$$U \lambda_0^3 = 3,1 \cdot 10^{-22}.$$

Daher

$$\Theta = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ sec}.$$

Bei dieser Ausrechnung wurde angenommen, daß die Breite der zu dem auslösenden Lichte gehörigen Spektrallinie nur herrührt von der elektromagnetischen Dämpfung der strahlenden Elektronen. Tatsächlich sind die Spektrallinien durchweg breiter und wird ihre Breite bei verdünnten Gasen in erster Linie durch den Dopplereffekt bestimmt. Das Verhältnis dieser beiden Breiten ist indessen nur etwa 10, so daß wir bei richtigeren Annahmen über die Linienbreite zwar eine Vergrößerung der Akkumulationszeit erwarten müssen, welche aber nicht sehr wesentlich ist. Ein weiterer Umstand, der eine Vergrößerung von Θ herbeiführen wird, ist die starke Absorption des Lichtes in den lichtelektrisch wirksamen Metallen, welche bewirkt, daß die auslösende Intensität für ein etwas unterhalb der Oberfläche liegendes Elektron eventuell nur ein kleiner Bruchteil der auffallenden Intensität ist.

Beobachtet man, nicht wie oben angenommen, in 1 m Abstand, sondern 10 cm von der Quelle entfernt, so wäre dagegen die Zeit wieder auf $\frac{1}{100}$ zu verkleinern; ebenfalls verkleinert wird sie, wenn man das Licht durch eine Linse konzentriert, oder wenn man mit röterem Licht von gleicher Stärke operiert. Im allgemeinen wird die Zeitdauer, wenn man die Intensität nicht außerordentlich schwächt, unmeßbar klein.

1) Ch. Fabry u. H. Buisson, *Compt. rend.* 152. p. 1888. 1911.

b) *Die Schwankung der Akkumulationszeit.* Wie in Fig. 5b dargestellt, ist die Dauer der Akkumulation keineswegs bestimmt, es kommen neben den überwiegenden Fällen mittlerer Werte sowohl sehr große, als unverhältnismäßig viel kleinere Werte vor, letztere namentlich dann, wenn (vgl. p. 913) die Energiezufuhr eine geeignet geregelte wäre. Eine untere Grenze für die Akkumulationszeit ist daher praktisch nicht vorhanden, ebensowenig wie eine obere. Der Vergleich mit der Erfahrung kann nur die mittlere Dauer betreffen.

Wie oben bei der Energie hervorgehoben und in Gegensatz zu der Planckschen Hypothese der Quantenemission gesetzt wurde, rührt die starke Streuung der Akkumulationszeit nur von den statistischen Eigenschaften des auffallenden Lichtes, nicht von dem Emissionsvorgange selbst her. Die Dauer des letzteren ist bei gegebener Zusammensetzung des erregenden Lichtes durch unseren Mechanismus mit gegeben.

Dagegen könnte ein weiteres Element des Zufalls durch die Dämpfung des mitschwingenden Elektrons eingeführt werden (deren Rolle bei uns nicht völlig geklärt ist). Wir sahen im monochromatischen Falle (§ 6), daß eine unternormale Dämpfung nötig ist, damit überhaupt nach unserer Grundhypothese lichtelektrische Emission stattfinden kann, und wir wollten uns vorstellen, daß durch wechselnde Konstellationen der Elektronen im Atom (Abschirmung der Ausstrahlung) die Dämpfung vermindert werden könne. Ein Zufallsmoment dieser Art muß durchaus hinzugezogen werden, will man nicht auf einen Widerspruch kommen: Wenn in allen Atomen die Elektronen zur photoelektrischen Wirkung gleichmäßig disponiert wären, so würde für alle der Akkumulationsprozeß zu gleicher Zeit beginnen, und es würde um diejenige Zeit, die dem Maximum in Fig. 5b entspricht, sozusagen eine lichtelektrische Katastrophe eintreten, indem ein unverhältnismäßig großer Photostrom aufräte, während nachher die lichtelektrische Aktivität allmählich versagen würde. Davon ist in Wirklichkeit nicht die Rede. Hier kommt also ein unserer Grundhypothese unzugängliches, sehr wesentliches neues Moment herein, das man lichtelektrische Disposition des Atoms nennen wird. Unser Befreiungsprozeß kann erst einsetzen, wenn zufällig diese Disposition erreicht ist. Durch diesen Umstand wird der licht-

elektrische Strom, wie wir annehmen, zeitlich konstant, trotz des in Fig. 5b dargestellten zeitlichen Verteilungsgesetzes. Als Ursache der wechselnden Disposition wäre in unserem Schema des Vorganges, wie gesagt, der größere oder geringere Betrag an Dämpfung anzusehen.

c) *Verträglichkeit mit den Kohärenzeigenschaften des Lichtes.* Wenn auch die unter a) berechnete Zeit Θ als klein bezeichnet wurde, so ist sie doch außerordentlich groß gegen die Zeiten, in denen eine Lichtquelle als kohärent wirkt. Der zugehörige „Lichtweg“ Θc ist nämlich in unserem Beispiel etwa $3 \cdot 10^6$ cm, während die Kohärenz selbst bei möglichst monochromatischen Lichtquellen schon nach Wegen von 50 cm praktisch aufhört. Dies wäre für die monochromatische Betrachtungsweise des ersten Teiles verhängnisvoll, macht aber bei der statistischen Behandlung durchaus keine Schwierigkeit.

Nachdem wir nach der Fourierschen Methode zerlegt haben, ist ja jeder der konstituierenden Wellenzüge unbegrenzt kohärent; die natürliche Beschaffenheit des Lichtes kommt nunmehr in der mit der Wellenlänge (nicht mit der Zeit) wechselnden Amplitude und Phase der einzelnen Bestandteile zum Ausdruck. Es liegt im Sinne der Fourierschen Methode, daß die zeitliche Unordnung in eine spektrale Unordnung übergeführt wird. Diese aber ist in unserer Rechnung vollständig berücksichtigt und überhebt uns weiterer Kohärenzrücksichten.

Beim Vergleich unserer Vorstellungen mit den Ergebnissen der Erfahrung möchten wir mehr auf die allgemeinen Züge des lichtelektrischen Vorganges — die spezifische Wirksamkeit der Frequenz (vgl. den Beginn dieses Paragraphen) und die Unwirksamkeit der Intensität — wie auf die quantitativen Einzelheiten Gewicht legen. Für die ersteren gibt unsere h -Hypothese ein geeignetes Modell, für die letzteren ist sie zu sehr schematisiert. Überdies sind gerade heute die quantitativen photoelektrischen Daten mit einer außerordentlichen Unsicherheit behaftet.

Von den beiden Typen des lichtelektrischen Vorganges, dem *normalen* und *selektiven*, kann unsere Theorie direkt wohl nur zur Darstellung des selektiven Effektes dienen.

Einmal wegen der Polarisationsverhältnisse: Unser Elektron schwingt in der Schwingungsrichtung der elektrischen Kraft

und tritt in dieser Richtung aus dem Atom aus. Soll es die Oberfläche des Metalles verlassen können, so muß also die elektrische Schwingung eine zur Oberfläche senkrechte Komponente haben. Dies ist bekanntlich die Bedingung für die Möglichkeit des selektiven Effektes, der ja bei senkrechter Inzidenz des Lichtes oder bei Polarisation in der Einfallsebene aufhört.

Sodann wegen der selektiven Folgen, die die Einführung der Eigenschwingungszahl ν_0 für die Nähe der Resonanz theoretisch mit sich bringt. Allerdings bezieht sich das beobachtete selektive Maximum auf den Strom (die Anzahl der Teilchen), unsere theoretische Zacke aber auf die Energie (die Geschwindigkeit der Teilchen). Es wäre außerordentlich wichtig zu wissen, ob, wie man vermuten sollte, tatsächlich mit dem selektiven Stromeffekt auch ein selektiver Geschwindigkeitseffekt, d. h. eine Steigerung der Anfangsgeschwindigkeiten in der Nähe des Maximums der Stromkurve, Hand in Hand geht. Nach Beobachtungen von Wright¹⁾ schien es so. Dieser fand bei Al für $\lambda = 2166 \text{ \AA}$. eine ausgeprägte Zacke in der Energiekurve (Aufladepotential) und nach der oben zitierten Formel von Lindemann, die das Maximum des Stromes bei den Alkalien so gut wiedergibt, ist $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-5}$ gerade derjenige Wert, für den man bei Al ein selektives Maximum des Stromes erwarten muß (wenigstens dann, wenn man dazu die Wertigkeit von Al gleich 1 nimmt). Indessen bedürfen einerseits die Wrightschen Ergebnisse (wie alle quantitativen photoelektrischen Daten) der Nachprüfung, andererseits haben Pohl und Pringsheim ein Strommaximum für Al nicht bei $\lambda = 2166$, sondern bei $\lambda = 2600$ gefunden.

Den photoelektrischen Strom nach unserer Theorie zu bestimmen, ist unmöglich. Seine Größe hängt von der Anzahl Atome ab, die, wie wir oben sagten, zur lichtelektrischen Aktivität disponiert sind; sie ist daher unserer Theorie nicht zugänglich.

Man könnte den normalen Effekt dadurch in unsere Vorstellungen einzubeziehen suchen, daß man im Atom sehr viele Resonatoren von allen möglichen ν_0 vorhanden denkt, die

1) J. R. Wright, Physik. Zeitschr. 12. p. 338. 1911.

voneinander unabhängig sein sollen. Man würde dann das Einsteinsche Gesetz (vgl. p. 884) im eigentlichen Sinne haben, d. h. die Gültigkeit der Gleichung $T = h\nu$ im ganzen Spektrum und dementsprechend eine kontinuierliche Zunahme der Energie nach Violett statt einer einmaligen Zacke.

Indessen ist diese Vorstellung von den vielen unabhängigen Resonatoren nicht nur sehr künstlich; sie würde auch dem charakteristischen Unterschied über die erforderliche Polarisierung zwischen selektivem und normalem Effekt nicht Rechnung tragen. Wir müssen daher auf ein spezielleres Verständnis des normalen Effektes verzichten und uns damit begnügen, daß unsere Theorie einige allgemeinste Züge des lichtelektrischen Problems wiedergibt, ohne mit der Elektrodynamik in Konflikt zu kommen; insoweit wenigstens, als man in der erforderlichen unternormalen Dämpfung keine prinzipielle Schwierigkeit sehen will.

(Eingegangen 7. April 1913.)

2. *Über die Zerstreuung der α -Strahlen*¹⁾; von *Fritz Mayer*.

I. Theoretische Betrachtungen.

Die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie sind bekanntlich durch die neueren Ergebnisse auf dem Gebiete der Elektrizität — es sei nur an die Gasentladung, die metallische Leitung und die Radioaktivität erinnert — außerordentlich gestützt worden. Trotzdem haben aber die Anwendungen auf dem Gebiete der Elektrizität gezeigt, daß speziell der Begriff des molekularen Stoßes doch nicht so ohne weiteres aus der kinetischen Theorie in dieses Gebiet übernommen werden kann. Schon die metallische Leitung der Wärme und Elektrizität führt selbst bei sehr günstigen Annahmen über die Zahl der Elektronen in den Metallen zu Weglängen, welche die aus der kinetischen Theorie zu erwartenden fast um das 10fache überschreiten. Der bekannte Lenardsche Versuch über den Austritt der Kathodenstrahlen durch dünne Metallfolien in Luft und die sich daran anschließenden Untersuchungen über die Absorption der Kathodenstrahlen in Materie zeigten schon lange, daß diese bei großen Geschwindigkeiten geradlinige oder nahezu geradlinige Wege zurücklegen, wie sie nach der kinetischen Theorie überhaupt nicht zu erwarten sind. Namentlich aber die großen Wege, welche die α -Strahlen, also materielle Teilchen, in Gasen und festen Körpern zurücklegen, übersteigen vieltausendmal die Strecke, die wir nach der kinetischen Theorie einem Gasmolekül als gerade Weglänge zuschreiben dürfen. Dieses so außerordentlich interessante Verhalten der α -Strahlen ist besonders geeignet, über die Mechanik des Zusammentreffens von Atomen bei sehr großen Geschwindigkeiten Aufschluß zu geben. Diese im Widerspruch mit der kinetischen

1) Die nachfolgende Untersuchung wurde zum Teil mit Mitteln ausgeführt, welche die Heidelberger Akademie der Wissenschaften Hrn. Prof. Reinganum zu diesem Zwecke zur Verfügung gestellt hatte.

Theorie stehende Erscheinung ist an eine bestimmte Mindestgeschwindigkeit V_g gebunden, die man zu $8,0 \cdot 10^8$ cm/sec annehmen kann.¹⁾ Unterhalb dieser Geschwindigkeit hört die Fähigkeit längerer geradliniger Wege auf. Dabei bleibt noch unbestimmt, ob V_g eine universelle Konstante ist, z. B. eine universelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Druckkräften innerhalb des Atoms (elastische Stöße könnten dann nur eintreten, wenn die relative Geschwindigkeit zweier Atome $< V_g$ ist), oder ob jeder Art von Atomen (Elektronen eingeschlossen) ein spezifisches V_g zukommt, das u. a. vom Atomgewicht abhängen könnte. Nach Ramsauer²⁾ scheint für Elektronen und Atome ein universelles V_g für „Durchgänge“ zu existieren. Eine endgültige Entscheidung dieser Frage wird sich möglicherweise an außerordentlich beschleunigten Kanal- oder Anodenstrahlen gewinnen lassen.

Eine weitere Frage ist die, ob für Geschwindigkeiten $> V_g$ sich die Mechanik der kinetischen Gastheorie während der Bahn des α -Teilchens überhaupt nicht bemerkbar macht; dazu rechnen wir nach der kinetischen Theorie die Zahl der zu erwartenden Stöße aus und vergleichen sie mit der Zahl der wirklichen Stöße. Wir betrachten das α -Teilchen als ein in Luft sich bewegendes Heliumatom. Diffusionsbestimmungen von Helium in Luft sind nicht veröffentlicht worden. Dagegen ist die innere Reibung von He gemessen.³⁾ Der Koeffizient der inneren Reibung für He bei 0° C. beträgt $1891 \cdot 10^{-7}$ abs. Einheiten. Bedeutet ρ die Dichte, \bar{c} die Quadratwurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat, L die mittlere Weglänge für He, so gilt⁴⁾:

$$(1) \quad \eta = 0,3227 \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot L.$$

\bar{c} berechnet sich aus der absoluten Temperatur T und dem Molekulargewicht M nach der Formel:

$$(2) \quad \bar{c} = 15799 \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

1) Grenzgeschwindigkeit der α -Strahlen.

2) C. Ramsauer, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik (4) 9. p. 522 ff. 1912.

3) A. O. Rankine, Proc. of the Roy. Soc. 83. p. 522. 1910.

4) K. Rappenecker, Zeitschr. f. physik. Chemie (6) 72. p. 713. 1910.

Daraus ergibt sich die Weglänge eines Heliumatoms in Helium gleicher Temperatur zu $2,518 \cdot 10^{-5}$ cm bei 0° C. und 760 mm Hg. Ist σ der Durchmesser des kugelförmig gedachten Atoms, n die Loschmidtsche Zahl, so gilt weiter

$$(3) \quad L = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n \pi \sigma^2}.$$

Wählen wir für n nach Planck $2,76 \cdot 10^{19}$, so wird

$$\sigma_{\text{He}}^2 = 3,24 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \quad \sigma_{\text{I}} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Verkleinerung der Weglänge infolge Biegung der Bahn durch molekulare Kräfte ist dabei vernachlässigt, da sie bei He nur etwa 1 Proz. beträgt.¹⁾ Nun ist in derselben Weise σ für Luftmoleküle berechnet von Reinganum.²⁾ Der auf Anziehung korrigierte Wert ist $\sigma_{\text{Luft}} = 2,61 \cdot 10^{-8}$ cm. Der Zentralabstand eines He-Atoms von einem Luftmolekül beim Stoß ist daher:

$$\sigma_{\text{He, Luft}} = \frac{\sigma_{\text{He}} + \sigma_{\text{Luft}}}{2} = 2,205 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Bewegen sich die He-Atome äußerst rasch zwischen den im Verhältnis dazu ruhenden Luftmolekülen, so ist in (3) $1/\sqrt{2}$ wegzulassen. Es folgt dann für die Weglänge der α -Teilchen in Luft unter Normalbedingungen $l = 2,372 \cdot 10^{-5}$ cm.

Die Zahl der Stöße pro Zentimeter wird:

$$\frac{1}{l} = 4,22 \cdot 10^4.$$

Nun ist nach Geiger³⁾ die Zahl der von einem α -Teilchen in Luft pro Zentimeter gebildeten Ionen für große Geschwindigkeiten, wie sich aus der Figur daselbst ergibt, $2,23 \cdot 10^4$. Es ist also in der Größenordnung eine Übereinstimmung zwischen der Zahl der gebildeten Ionen und der Zahl der nach kinetischer Theorie errechneten Stöße vorhanden.⁴⁾ Die Anziehung, die das α -Teilchen auf die Luftmoleküle ausübt, kann infolge der großen Geschwindigkeit vernachlässigt werden.⁵⁾ Wir können daher sagen: Bei Geschwindigkeiten

1) M. Reinganum, Physik. Zeitschr. 12. p. 579. 1911.

2) M. Reinganum, Ann. d. Phys. 10. p. 342. 1903.

3) H. Geiger, Proc. of the Roy. Soc. A. 82. p. 491. 1909.

4) Mit dem Chapmanschen Faktor 0,491 in (1) wird die Zahl der aus der Gastheorie berechneten Stöße um die Hälfte größer. Vgl. Phil. Trans. A. 211. p. 433. 1912.

5) J. Franck u. G. Hertz, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. Nr. 11. p. 597. 1912.

des α -Teilchens $> V_g$ tritt da, wo nach den kinetischen Vorstellungen ein elastischer Stoß mit ganz beträchtlichen Bahnänderungen stattfinden sollte, allerdings keine solche Ablenkung, dafür aber eine andere Erscheinung, nämlich eine Ionisation des getroffenen Moleküls ein. Die tatsächlich erfolgende Ablenkung ist äußerst gering, doch tritt in (oder nahezu in) der Richtung der ursprünglichen Bewegung ein beträchtlicher Energieverlust ein. Dieser läßt sich theoretisch folgendermaßen berechnen. 10000 Volt = 10^{12} elektrom. Einheiten beeinflussen theoretisch die Reichweite der α -Strahlen um 0,224 mm¹⁾, d. h. 1 cm Reichweite entspricht ein Spannungsverlust von

$$\frac{10^{18}}{0,224} \text{ e. m. Einh.}$$

Das bedeutet einen Energieverlust pro Zentimeter von

$$\frac{271,56 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{18}}{0,224} \text{ C.G.S.}$$

Unter Zugrundelegung des oben gefundenen Wertes der Stoßzahl pro Zentimeter Luftweg ergibt sich:

$$\text{Energieverlust pro Stoß} = 3,381 \cdot 10^{-11} \text{ erg.}$$

Nimmt man dagegen den experimentell gefundenen Wert $2,23 \cdot 10^4$ für die Zahl der pro Zentimeter gebildeten Ionen, so folgt:

$$\text{Energieverlust pro Stoß} = 6,39 \cdot 10^{-11} \text{ erg.}$$

Diese Energie, die dem Luftmolekül eine Temperatur von über $2,5 \cdot 10^6$ abs. mitteilen könnte, wird wohl hauptsächlich zur Ionisierung verwendet. Denn dieselbe entspricht einem Potentialabfall von etwa 20 Volt. Diese Zahl stimmt in der Größenordnung recht gut mit den neueren Werten der Ionisierungsspannung in Gasen überein.²⁾

Nun sind gastheoretisch aber auch die kleinen Winkel von großem Interesse, um welche die α -Teilchen beim Stoß mit den Molekülen abgelenkt werden. Bei dieser Erscheinung des „Scatteringeffekts“, oder der „Zerstreuung“ erhebt sich nämlich

1) Vgl. z. B. M. Reinganum, Ann. d. Phys. 33 p. 137. 1910.

2) J. Franck u. G. Hertz, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. Nr. 2. p. 44. 1913.

die Frage: Sind vielleicht die seitlichen Geschwindigkeiten, die das α -Teilchen beim ablenkenden Stoße bekommt, von der Größenordnung der gewöhnlichen molekularen Geschwindigkeiten? In diesem Fall könnte man erwarten, daß für den Zerstreuungseffekt die Geschwindigkeiten der durchteilten Moleküle selbst nicht ohne Bedeutung sind.

Es ist nach Geiger der „Atomzerstreuungswinkel“ für Gold bei $\text{Ra C } \frac{1}{200}^\circ$. Ist die Zerstreuung proportional dem Atomgewicht und nimmt sie umgekehrt mit Quadrat der Geschwindigkeit des α -Teilchens zu, wie die Versuche von Geiger nahe legen, so folgt für Polonium der Atomzerstreuungswinkel in Luft:

$$\frac{29 \cdot 2,06^2 \cdot \pi}{197 \cdot 200 \cdot 180 \cdot 1,62^2} = 2,07 \cdot 10^{-5} \text{ im Bogenmaß.}$$

Die absolute seitliche Geschwindigkeit u_a des α -Teilchens nach dem Stoße ist also:

$$u_a = 2,07 \cdot 10^{-5} \cdot 1,62 \cdot 10^9 = 3,26 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Die seitliche Geschwindigkeit des Luftmoleküls wird bei Erhaltung der Bewegungsgröße:

$$u_L = \frac{3,36 \cdot 10^4 \cdot 4}{29} = 4,64 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Diese seitlichen Geschwindigkeiten sind von der Größenordnung der molekularen Geschwindigkeiten. Nach der kinetischen Theorie ist nämlich die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat des Heliumatoms bei 300° abs:

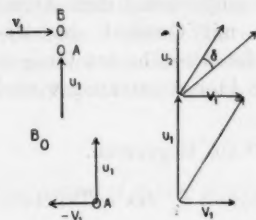
$$u_{300} = 1,58 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{\frac{300}{4}} = 13,66 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Der Vergleich der Zahlen zeigt, daß sich bei dem Vorgang der Zerstreuung eventuell ein Wärmeaustausch in seitlicher Richtung bemerkbar machen könnte. Man kann sich hierfür verschiedene Möglichkeiten denken. Den eigentlich elastischen Stoß hat man dabei natürlich auszuschließen.

1. Man kann sich vorstellen, jeder Stoß finde zentral statt, so daß kein zur Seiteschleudern des Moleküls eintritt. Dann erfolgt dennoch eine Ablenkung des α -Teilchens aus der molekularen Bewegung und dem Energieverlust des α -Teilchens beim Stoß mit Hilfe einer Art von Relativitätsbetrachtung.

Ein Molekül B bewege sich in seitlicher Richtung mit der Geschwindigkeit v_1 , das α -Teilchen A senkrecht dazu mit der Geschwindigkeit u_1 . Der Stoß finde zentral statt. Dann läßt sich der Vorgang auch so auffassen: das Molekül ruht, das α -Teilchen bewegt sich mit $-v_1$ seitlich und mit u_1 nach vorwärts. Nach dem Stoß ergeben sich die Richtungen durch Hinzufügung von $+v_1$. Die Richtung ändert sich also nicht, wenn u_1 nach dem Stoß dasselbe geblieben ist. Nun bedingt aber die Energieabnahme einen Geschwindigkeitsverlust. Die Geschwindigkeit des α -Teilchens nach dem Stoß sei u_2 .

Dann wird die Ablenkung:



$$(4) \quad \delta = v_1 \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right).$$

Die Energieabnahme beim Stoß ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - u_2^2)$$

oder angenähert

$$= m_1 u_1 (u_1 - u_2).$$

Daraus und aus (4)

$$(5) \quad \delta = v_1 \frac{\varepsilon}{m_1 u_1^3}.$$

Für v_1 ist zu setzen, wenn wir der Einfachheit halber mit der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat statt der mittleren Geschwindigkeit rechnen:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 15800 \cdot \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Dann lautet die Schlußformel:

$$(6) \quad \delta = 15799 \cdot \sqrt{\frac{2T}{3M}} \cdot \frac{\varepsilon}{m_1 u_1^3}.$$

Es wäre also die Zerstreung des α -Teilchens beim Einzelstoß umgekehrt proportional der dritten Potenz seiner Geschwindigkeit. Ferner fände eine Proportionalität der Zerstreung mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur statt.

2. Man denke sich das α -Teilchen das Atom durchdringend. Dann sollen wie bei jedem Stoß seitliche Reaktions-

kräfte auftreten welche dem α -Teilchen eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Bahn erteilen. Dies bedingt wiederum eine Ablenkung. Nehmen wir in der Senkrechten zur Flugrichtung die Erhaltung der Energie und der Bewegungsgröße als gültig an, so ergibt sich folgendes.

Wir bezeichnen Masse, seitliche Geschwindigkeit vor und nach dem Stoß mit m, u, u' , für das Luftmolekül mit dem Index 1, für das α -Teilchen mit dem Index 2 versehen. Dann ist $u_2 = 0$, und es gilt:

$$(7) \quad \begin{cases} m_1 u_1 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \\ m_1 u_1^2 = m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2 \end{cases}$$

Ist v die Bahngeschwindigkeit des α -Teilchens nach dem Stoße, so wird die Ablenkung:

$$\delta = \frac{u_2'}{v}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt aus (7)

$$u_2' = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2}.$$

Dann wird

$$\delta = \frac{u_1}{v} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

Für u_1 ist wieder zu setzen:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 15800 \cdot \sqrt{\frac{T}{m_1}}.$$

Es folgt:

$$(8) \quad \delta = \frac{1}{v} \cdot 15800 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} T m_1} \cdot \frac{2}{m_1 + m_2}.$$

Diese Formel ergäbe die Atomzerstreuung umgekehrt proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit des α -Teilchens.

Beide Schlußformeln (6) und (8) gestatten die Berechnung von δ aus den bekannten Werten der Geschwindigkeit und des Energieverlustes. Nehmen wir für den letzteren die aus der Ionisation berechnete Zahl $\varepsilon = 6,39 \cdot 10^{-11}$ erg., so berechnet sich der Atomzerstreuungswinkel δ für α -Strahlen des Polonium in Graden:

$$(T = 291^\circ \text{ abs.}),$$

aus (6)

Gold	$\delta = 1,8 \cdot 10^{-9}$
Silber	$\delta = 2,5 \cdot 10^{-9}$
Aluminium	$\delta = 5,0 \cdot 10^{-9}$

aus (8)

$$\text{Gold} \dots \dots \delta = 1,1 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Silber} \dots \dots \delta = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Aluminium} \dots \dots \delta = 2,6 \cdot 10^{-3}$$

Wir wollen noch zeigen, daß man bei Annahme gewöhnlicher Zentralkräfte zwischen dem Atom und dem α -Teilchen nicht mit der Vorstellung auskommt, daß das Atom aus einem einzigen wirkenden Kern besteht.

Wie wir sahen, kann der Energieverlust pro Stoß aus der Ionisation zu $6,39 \cdot 10^{-11}$ erg berechnet werden. Setzen wir nun angenähert die Geschwindigkeit des Luftmoleküls vor dem Stoß Null, seine Masse m_1 , seine Geschwindigkeit in Stoßrichtung nach dem Stoß gleich v_1 , Masse und Geschwindigkeiten des α -Teilchens vor und nach dem Stoß m_2 , v_2 , v_2' , so kann man für die Mechanik des Stoßes in Flugrichtung als gültig annehmen:

$$m_1 v_1 = m_2 (v_2 - v_2'),$$

während

$$\frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_2'^2) = 6,39 \cdot 10^{-11} \text{ erg.}$$

Ist gemäß der Loschmidtschen Zahl $m_2 = 4 \cdot 1,62 \cdot 10^{-24}$, so folgt:

$$v_2^2 - v_2'^2 = 1,97 \cdot 10^{13}$$

und da v_2' angenähert $= v_2$, so folgt:

$$v_2 - v_2' = \frac{1,97 \cdot 10^{13}}{2 v_2},$$

setzt man $v_2 = 1,6 \cdot 10^9$, so ergibt die erste und letzte Gleichung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 1,66 \cdot 10^{-17} \text{ erg,}$$

d. h. die kinetische Energie, welche das Luftmolekül in Stoßrichtung bekommt, ist mehr als eine Million Mal kleiner als der Energieverlust des α -Teilchens beim Stoß. Es bliebe jetzt noch die seitliche Energie des Luftmoleküls zu berechnen. Nehmen wir wieder Energieprinzip und Erhaltung der Bewegungsgröße als gültig an, so folgt für die seitliche Geschwindigkeit des Luftmoleküls (vgl. p. 935 oben)

$$u_L = 4,64 \cdot 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Dann wird die seitliche Energie des Luftmoleküls

$$\frac{1}{2} m_L u_L^2 = 5,06 \cdot 10^{-16} \text{ erg.}$$

Auch diese Energie ist immer noch hunderttausendmal kleiner als die vom α -Teilchen beim Stoß abgegebene Energie. Die Gesamtenergie, die das Luftmolekül unter Voraussetzung des Energieprinzips und des Gesetzes der Erhaltung der Bewegungsgröße bekommt, ist also bedeutend kleiner als der Energieverlust des α -Teilchens. Diese Unstimmigkeit zwischen der abgegebenen und der aufgenommenen Energie zeigt deutlich, daß Theorien, welche die Gesetze der Zentralbewegung auf das α -Teilchen und Molekül anwenden und beide als einfache Massenpunkte betrachten, nicht möglich sind.

Wir wollen nun die bisherigen Theorien über die Zerstreuung der α -Teilchen kurz besprechen:

Die ersten eingehenden Rechnungen über das Problem stammen von Riecke.¹⁾ Er untersucht die Wirkung eines neutralen Moleküls auf die Bahn eines rasch bewegten α -Teilchens für den Fall einer Anziehung. Der anziehenden Kraft wird ein Potential zugeschrieben. Dann resultiert als Bahn des α -Teilchens eine hyperbelartige Kurve. Die Anziehung erfolgt durch einen Bipol, dessen Achsenlänge gleich dem Moleküldurchmesser gesetzt wird. Im Falle einer großen Annäherung kann der positive Pol gegenüber dem negativen vernachlässigt werden. Als Formel für die Ablenkung folgt dann:

$$(9) \quad \cos \alpha = \frac{\eta}{m_1} \frac{s}{g_0^2 b} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2},$$

darin ist $\pi - 2\alpha$ der Ablenkungswinkel, m_1 und m_2 Masse des α -Teilchens bzw. neutralen Moleküls, g_0 Anfangsgeschwindigkeit des α -Teilchens, η seine Ladung, b Abstand seiner Bahn vom Molekül für große Entfernung. Das Molekül selbst wird als ruhend angenommen.

Die Theorie von J. J. Thomson²⁾ setzt eine andere Verteilung der elektrischen Massen im neutralen Molekül voraus. Es seien im Atom N_0 negative Korpuskeln gleichmäßig verteilt. Für die positive Masse läßt er zwei Annahmen zu, entweder sind sie in einem Kugelraum homogen verteilt oder nur

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 27. p. 797 ff. 1908.

2) J. J. Thomson, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 15. p. 465 ff. 1910.

in einzelnen Volumelementen vorhanden. Für die Ablenkung durch die Elektronen ergibt sich

$$(10) \quad \Theta_1 = \frac{16}{5} \cdot \frac{e^2}{b m v^2} \sqrt{\frac{3 N_0}{2}}.$$

Die Ablenkung der positiven Massen wird im Falle homogener Verteilung:

$$(11) \quad \Phi_1 = \frac{e^2}{m v^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{N_0}{b},$$

im Falle atomistischer Struktur:

$$(11') \quad \Phi_1' = \frac{16}{5} \cdot \frac{e^2}{m v^2 b} \cdot \sqrt{\frac{3 N_0}{2}} \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) \sigma^{1/2}}.$$

Darin bedeutet e das Elementarquantum, b Atomradius, m, v Masse und Geschwindigkeit des α -Teilchens. σ bedeutet

$$\frac{\text{Volumen d. pos. Masse}}{\text{Atomvolumen}};$$

die Gesamtablenkung durch ein Atom wird dann:

$$(12) \quad \Theta = (\Theta_1^2 + \Phi_1^2)^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad (\Theta_1'^2 + \Phi_1'^2)^{1/2}.$$

Auch in dieser Theorie ist eine Bewegung des neutralen Atoms als Ganzes unberücksichtigt.

Rutherford¹⁾ denkt sich das neutrale Atom bestehend aus einem positiven, in einem Punkt konzentrierten Kern mit der Ladung $N \cdot e$, umgeben von den N gleichförmig verteilten negativen Elektronen. Für große Einzelablenkungen kommt nur der positive Kern in Betracht, für die kleinen im wesentlichen die Elektronen. Für die kleinen Ablenkungen benutzt er zum Teil die Thomsonschen Formeln. Durch eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung findet er dann den Gesamteffekt der einzelnen großen und kleinen Ablenkungen und kommt zu der Schlußformel:

$$(13) \quad \Phi = \frac{2 \cdot e \cdot E \sqrt{n \pi t}}{\sqrt{0,46} \cdot m u^2} N.$$

Φ hat folgende Bedeutung: Wenn die α -Teilchen eine Folie von der Dicke t passieren, so wird gerade die Hälfte der Teilchen um einen Winkel abgelenkt, der größer ist als Φ . E, m, u sind Ladung, Masse und Geschwindigkeit des α -Teilchens. n bedeutet die Zahl der Atome in der Volumeinheit.

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 21. p. 669 ff. 1911.

Neuerdings ist der Scatteringeffekt auch von C. G. Darwin¹⁾ theoretisch behandelt worden. Er denkt sich das Atom mit der positiven Masse im Zentrum und die Elektronen gleichmäßig verteilt in einer Kugel um die positive Masse oder über ihre Oberfläche. Die Arbeit befaßt sich zuerst mit der Geschwindigkeitsverminderung der α -Teilchen, also mit ihrer Absorption in Materie. Es gelingt dem Verfasser aus den theoretischen Annahmen die Bremswirkung verschiedener Substanzen in sehr schöner Übereinstimmung mit dem Experiment zu berechnen. Die Theorie berücksichtigt die Wirkung des α -Teilchens auf das einzelne bewegte Elektron im Atom, mit dem es eine Zeitlang parallel läuft. Es ist also hier die Ionisation und der dadurch bedingte Energieverlust in Rechnung gezogen. Aus den Betrachtungen ergeben sich dann auch Formeln für die Zerstreuung. Die Theorie weist also gegenüber den früheren einen entschiedenen Fortschritt auf. Doch enthalten die Formeln für die Zerstreuung außer der Zahl n der Elektronen im Atom noch die unbekannte Größe σ , welche den Atomradius bedeutet. Der gastheoretische Wert von σ ist aber zu groß, um für die Zerstreuung mit dem Experiment übereinstimmende Werte zu ergeben. Kleinere Werte von σ geben eine bessere Übereinstimmung. Diese vorläufige Unsicherheit macht die Formeln noch nicht verwendbar, um allein aus der gemessenen Zerstreuung Schlüsse über den Aufbau des Atoms zu ziehen. Erst wenn man für eine von den Größen anderweitig begründete Werte hat, läßt sich die andere dann mit Hilfe des Scatteringeffektes bestimmen.

Schließlich hat N. Bohr die Theorie von Darwin in außerordentlich schöner Weise weiter vervollkommen.²⁾ Doch wendet er dieselbe bisher nur auf die Bremswirkung, nicht auf den Zerstreuungseffekt an.

II. Historisches zur Zerstreuung der α -Strahlen.

Die Formeln (6) und (8) zeigen, daß, wenn nur „Wärmezestreuung“ stattfindet, eine Zunahme der Atomzerstreuung

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. 23. p. 901 ff. 1912.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 25. p. 10 ff. 1913.

proportional mit der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur der durchdrungenen Materie vorhanden sein müßte. Die vorliegende Arbeit sollte einmal experimentell prüfen, wie weit Wärmezestreuung vorhanden ist, zweitens aber auch neues Material zur Zerstreuung der α -Teilchen überhaupt erbringen.

Zuerst wurde der Effekt festgestellt von Rutherford¹⁾ auf photographischem Wege. Weiter befaßten sich damit Kučera und Mašek²⁾, W. H. Bragg³⁾, E. Meyer⁴⁾ und L. Meitner⁵⁾, welche die Erscheinung qualitativ genauer untersuchten. Eine quantitative Messung des Scatteringeffektes erfolgte dann von H. Geiger⁶⁾, der zum ersten Male genaue Zahlen für die Zerstreuung gab. Es soll hier nur dessen Arbeit erwähnt werden. Die Strahlung, die Geiger verwendete, war die homogene α -Strahlung von Ra C. Die Messungsmethode beruhte auf der Zählung der Szintillationen, welche die α -Teilchen auf einem Zinksulfidschirm hervorrufen. Das Strahlenbündel passiert im Vakuum eine kreisförmige Öffnung und fällt dann auf den Zinksulfidschirm. Wird eine Folie in den Strahlengang eingeschoben, so erscheinen infolge der Zerstreuung die Szintillationen auch außerhalb des geometrischen Bildes. Aus der mit einem Mikroskop gemessenen Verteilung der Szintillationen über den Schirm läßt sich in einfacher Weise der Betrag der Zerstreuung ermitteln. Als quantitatives Maß dafür verwendet Geiger den wahrscheinlichsten Winkel, um den ein α -Teilchen beim Durchgange durch die Folie aus seiner Bahn abgelenkt wird. Auf die von Geiger gefundenen Resultate werden wir später einzugehen haben.

III. Die Versuchsanordnung.

Als Strahlungsquelle diente in unseren Versuchen von der Chininfabrik Buchler & Co. in Braunschweig bezogenes

1) E. Rutherford, Phil. Mag. 12. p. 143. 1906.

2) G. Kučera u. B. Mašek, Physik. Zeitschr. 7. p. 650. 1906.

3) W. H. Bragg, Phil. Mag. 13. p. 507. 1907.

4) E. Meyer, Physik. Zeitschr. 8. p. 425. 1907.

5) L. Meitner, Physik. Zeitschr. 8. p. 489. 1907.

6) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. A. 81. p. 174. 1908. — 83. p. 492 ff. 1910.

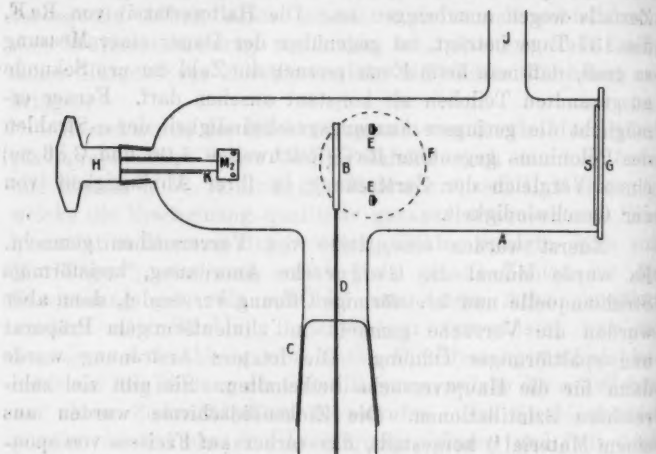
Polonium. Infolge der Konstanz der Strahlung fällt dabei die ständige Korrektur weg, die bei dem RaC des raschen Zerfalls wegen anzubringen ist. Die Halbwertszeit von RaF, die 137 Tage beträgt, ist gegenüber der Dauer einer Messung so groß, daß man beim Einzelversuch die Zahl der pro Sekunde ausgesandten Teilchen als konstant ansehen darf. Ferner ermöglicht die geringere Ausgangsgeschwindigkeit der α -Strahlen des Poloniums gegenüber RaC (Reichweiten 7,06 und 3,86 cm) einen Vergleich der Zerstreuung in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

Zuerst wurden eine Reihe von Vorversuchen gemacht. Es wurde einmal die Geigersche Anordnung, kreisförmige Strahlenquelle und kreisförmige Öffnung verwendet, dann aber wurden die Versuche gemacht mit linienförmigem Präparat und spaltförmiger Öffnung. Die letztere Anordnung wurde dann für die Hauptversuche beibehalten. Sie gibt viel zahlreichere Szintillationen. Die Zinksulfidschirme wurden aus einem Material¹⁾ hergestellt, das vorher auf Freisein von spontanen Szintillationen geprüft war.

Im folgenden soll die endgültige experimentelle Anordnung beschrieben werden. Figg. 1 und 2 stellen einen horizontalen und einen vertikalen Längsschnitt durch den eigentlichen Apparat dar. Das 21 cm lange und im Lichten 5 cm weite Rohr *A* ist an seinem einen Ende durch die aufgekittete Glasplatte *G* geschlossen, die den Schirm *S* trägt. Das andere Ende bildet der in den Schliff passende Hahn *H*. Dieser trägt ein Glasröhrchen, in welches der Kupferstab *K* eingekittet ist. Daran angelötet ist das Messingplättchen *M*₁, auf welches das Präparat *P* gebracht wird. Dieses ist ein Kupferblech, dessen 1 cm lange und 0,3 mm hohe vordere Kante mit Polonium überzogen ist. Darauf wird ein zweites Messingplättchen *M*₂ geschraubt. Die vorderen Kanten von *M*₁ und *M*₂ ragen etwa 0,5 mm über das Präparat heraus. Dadurch wird vermieden, daß der eventuell auf der Ober- und Unterseite des Kupferbleches haftende Poloniumniederschlag eine inhomogene Strah-

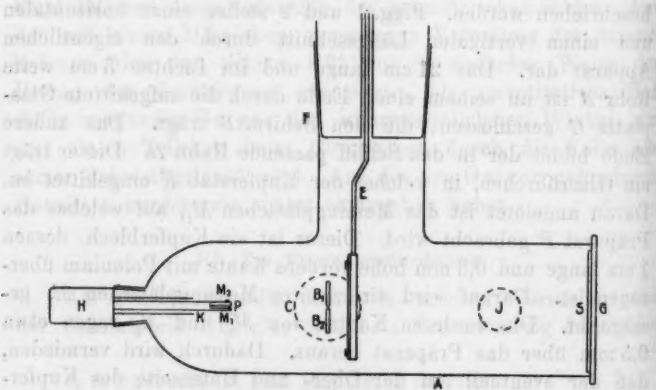
1) Das Zinksulfid war von Kahlbaum in Berlin und Schuchardt in Görlitz bezogen. Man hat sehr darauf zu achten, daß aus Fabriken bezogene Sidotblende nicht radioaktiv infiziert ist.

lung mit aussenden könnte. Vom Hauptrohr aus gehen drei verschiedene Ansatzrohre. Das 7,5 cm lange und 2,5 cm weite



Horizontaler Längsschnitt.

Fig. 1.



Vertikaler Längsschnitt.

Fig. 2.

Rohr C trägt einen durchbohrten Schliff, worin der Messingstab D festgekittet wird. Sein Ende trägt zwei in einer Ebene

liegende Messingbleche B_1 und B_2 , die mit ihren einander gegenüberliegenden, abgeschrägten Kanten einen Spalt von 18 mm Länge und 0,17 mm Breite bilden. Der Spalt liegt also horizontal und das Präparat kann durch Drehen ihm genau parallel gestellt werden. Das vertikal aufsteigende Rohr F , 10 cm lang und 4 cm weit, hat einen doppelt durchbohrten Schliff. Die beiden Durchbohrungen enthalten je einen starken Messingdraht E eingekittet, der jeweils in einen 4 cm langen, prismatischen Messingstab endet. Auf diesen wird zur Festhaltung der Folien ein ähnlicher dünnerer Teil aufgeschraubt. Die Folien wurden zwischen die beiden Messingsäulchen gespannt. In Fig. 2 ist ein solcher Teil der Anschaulichkeit halber in die Mitte gerückt, während man sich in Wirklichkeit je eine solche Anordnung etwas vor und zurück zu denken hat. Das Rohr J führt zu einem McLeodschen Manometer und von da zu einer Gaedepumpe. Die Heizung der Folien geschah elektrisch. Die Messingdrähte E dienen gleichzeitig als Stromzuführungen.

Die Beobachtung der Szintillationen erfolgte mit einem Zeiss'schen Mikroskop von etwa 50 facher linearer Vergrößerung. Der Tubus konnte horizontal gestellt und dann vermittelt Schlittenführung und Ablesetrommel in vertikaler Richtung mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{100}$ mm verschoben werden. Der Durchmesser des Gesichtsfeldes betrug 2,2 mm. In vielen Fällen erwies es sich als vorteilhaft, einen Teil auszublenden. Auch Geiger hatte darauf aufmerksam gemacht, daß ein in der Richtung der Verschiebung zu ausgedehntes Gesichtsfeld einen Fehler in der Rechnung bedingen müsse. Es wurden darum verschiedene Blenden benutzt. Diese hatten die Form von Rechtecken und wurden in der Weise in das Okular eingesetzt, daß nunmehr das Gesichtsfeld in der Horizontalen unverändert blieb, in der vertikalen dagegen der Durchmesser in den einzelnen Fällen 0,4 und 0,8 mm betrug.

Da es nun durchaus nicht leicht ist, bei völliger Dunkelheit das Gesichtsfeld stets im Auge zu behalten, so wurde, um dem Auge eine gewisse Stütze zu geben, ein kurzes Messingrohr über das Okular gestülpt. Es erwies sich außerdem als vorteilhaft, das Gesichtsfeld hier und da mit schwachem roten Licht zu beleuchten.

Die Zeiten wurden mit zwei Stoppuhren gemessen. Es konnten so zwei Messungen hintereinander gemacht werden, ohne das Auge zwischendurch durch eine Zeitablesung zu stören. Im übrigen zeigte sich, daß schwaches rotes Licht, das für alle Zwischenablesungen usw. verwendet wurde, ein gut ausgeruhtes Auge in seiner Empfindlichkeit nicht herabzusetzen imstande ist.

Fig. 3 gibt eine schematische Übersicht der Gesamtanordnung. *M* ist das Mikroskop, *A* der eigentliche Apparat, *B*

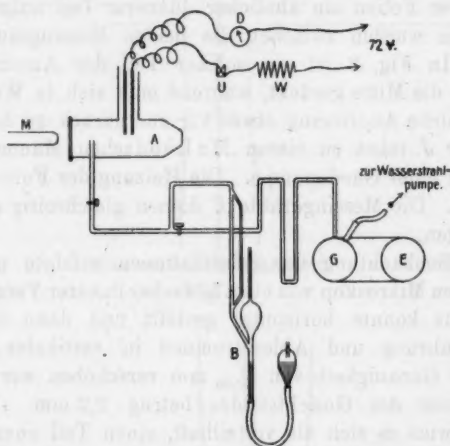


Fig. 3.

das Manometer nach McLeod, *G* eine Gaedepumpe und *E* der zu ihrem Betrieb benutzte Elektromotor. *D* bedeutet ein Ampèremeter und *W* einen regulierbaren Widerstand. *U* ist ein Unterbrecher, der so gelegen zu denken ist, daß er während der Beobachtung bequem zu handhaben ist.

IV. Prüfung der Temperaturabhängigkeit der Zerstreuung.

Es sollen jetzt zuerst die Versuche zur Auffindung der Temperaturabhängigkeit der Zerstreuung beschrieben werden. Spalt und Präparat wurden einander parallel gestellt, eine bestimmte Folie eingesetzt, das Mikroskop auf den Sidotblendschirm eingestellt und dann die Pumpe in Gang gesetzt. Diese

blieb während der Dauer eines Versuches immer in Tätigkeit. Bei einem entsprechend geringen Drucke (bei $\frac{1}{100}$ mm Hg ist die Zerstreuung durch die vorhandenen Luftreste bei den gewählten Dimensionen unmerklich geworden) wurde mit der Beobachtung begonnen. Bei gutem Vakuum ohne eingeschaltete Folie treffen die α -Teilchen alle auf einem schmalen Gebiete des Schirmes auf, nämlich dem geometrischen Spaltbild. Ist dagegen eine Folie eingeschaltet, so wird sich das Szintillationsgebiet verbreitern, die Häufigkeit der Szintillationen wird vom geometrischen Spaltbilde aus nach oben und unten gemäß einer gewissen Kurve abnehmen und schließlich Null werden. Bekommt nun die Folie durch die elektrische Heizung eine höhere Temperatur, so muß, wenn ein Temperaturkoeffizient im Sinne von (6) oder (8) vorhanden ist, die Zerstreuung zunehmen, d. h. das Szintillationsgebiet sich in der Vertikalen ausdehnen. Da sich aber die Gesamtzahl nicht ändert, so muß ihre Häufigkeit in der Spaltmitte abnehmen, in den Randgebieten aber zunehmen. Dazwischen wird natürlich oberhalb und unterhalb eine indifferente Zone sich befinden. Bestimmt man also an einer beliebigen Stelle die Zahl der pro Minute auftreffenden Szintillationen, so muß, wenn die Folie geheizt wird, diese Zahl in der Mitte kleiner, in den Randgebieten größer werden. Die Versuche wurden in Gemeinschaft mit Hrn. Prof. Reinganum ausgeführt. Der eine Beobachter machte die Szintillationszählungen, der andere schaltete den Strom aus und ein, in der Weise, daß der Beobachter nicht wußte, welchen Fall er gerade untersuchte. Es war dies bei der Schwierigkeit, mit der manche Szintillationen erkannt werden können, nötig. In einigen Fällen wurde der Sulfidschirm selbst mit einer sehr dünnen Metallfolie bedeckt, um zu vermeiden, daß die Wärmestrahlung der geheizten Folie die Empfindlichkeit des Schirmes beeinträchtigte. Außerdem konnte bei dieser Anordnung die Temperatur der Folie bis zur schwachen sichtbaren Glut gesteigert werden, was sonst der Störung des Auges wegen vermieden werden mußte. Eine Veränderung der Empfindlichkeit der Sidotblende durch Wärmestrahlung konnte übrigens nicht festgestellt werden.

Versuche über die Temperaturabhängigkeit der Zerstreuung wurden gemacht mit Folien von Platin, Silber, Aluminium

und Glimmer. Es wurde stets nahe an schwache Rotglut erhitzt. Die Glimmerfolien wurden für die elektrische Heizung mit sehr dünnen Metallfolien beklebt. Es sei hier für vier Silberfolien ein Einzelbeispiel einer Messung gegeben. Es wurde eine Stelle dicht beim Maximum beobachtet. Die Zahl der jeweils gezählten Szintillationen betrug 50. Die Zeiten hierfür betrugen:

Geheizte Folie	Ungeheizte Folie
16"	36"
26	26
20	20
28	23
20	23
18	21
19	29
21	21
27	19
21	15
24	23
Summe 240	25
	22
	19
	26
	348

Es sind also bei ungeheizter Folie in 15 Beobachtungen in 261" $50 \cdot 15 = 750$ Szintillationen gezählt worden. Pro Minute treffen also an dieser Stelle $\frac{750 \cdot 60}{348} = 129$ Szintillationen auf.

Dieselbe Rechnung ergibt für den Mittelwert bei geheizter Folie 137 Szintillationen. Der Unterschied ist nicht in dem zu erwartenden Sinne, jedoch noch innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler und Szintillationsschwankungen, so daß daraus kein Schluß gezogen werden kann. Es wurde nun eine Stelle am Rande untersucht. Es ergab sich:

Geheizt	Ungeheizt
Szint. pro Min. 16,4	24,6

Hier wäre der umgekehrte Effekt zu erwarten. Eine Stelle auf der anderen Seite des Maximums ergab:

Geheizt	Ungeheizt
17,3	16,3

Der Unterschied ist im Sinne der Theorie jedoch sehr klein.

Es sollen nun in Tabellenform die wichtigsten Versuchsreihen mitgeteilt werden. Die erste Kolumne gibt die verschiedenen Stellungen des Mikroskops in der Vertikalen in Millimetern, die zweite den Mittelwert der Szintillationen pro Minute bei ungeheizter, die dritte bei geheizter Folie.

Tabelle I.

1 Platinfolie.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
8	9,1	10,6
10	10,1	22,5
13	16,1	14,2
14	18,8	16,7
15	22,6	23,7
18	15,7	18,2

Tabelle II.

1 Glimmerfolie mit Gold überzogen.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
13	37,5	38,4
14	41,4	36,8
15	48,7	53
16	34,8	34,3
19	10,2	9,3

Tabelle III.

1 Glimmerfolie mit Aluminium überzogen.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
9	29	13,8
11	48,5	54,2
12	59	55,6
12,5	95,5	93
13	70,6	75
13,5	105,6	101,6
14	111,4	112,6
17,5	32,4	28,6
20	9,4	10,8

Tabelle IV.

2 Aluminiumfolien.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
12,4	60,3	64
14,4	128	125
16,4	75	58

Tabelle V.

1 Platinfolie.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
9,4	38,5	31,3
9,9	30,6	30,7
14,4	25,3	25,2
16,4	19,1	19,3
19,4	22,3	26,1

Tabelle VI.

1 Glimmerfolie mit Kupfer überzogen.

Stelle	Ungeheizt	Geheizt
14,4	48,7	50,9
14,9	71,3	68
16,9	24	24

Aus diesen 6 Tabellen und einer Reihe weiterer Beobachtungen wurde der Schluß gezogen, daß sich ein *Einfluß der Temperatur auf die Zerstreuung nicht einwandfrei feststellen ließ*. Wenn auch manchmal sichere Andeutungen eines Temperaturkoeffizienten da zu sein schienen, so zeigte doch immer die genauere Untersuchung, daß auch wieder Unterschiede im umgekehrten Sinne festzustellen waren, daß somit die Resultate nicht widerspruchsfrei blieben.

V. Zerstreuungsmessungen bei gewöhnlicher Temperatur nach der Szintillationsmethode.

Es wurden nun ferner Zerstreuungsmessungen bei gewöhnlicher Temperatur vorgenommen, und zwar erstens nach der Methode der Szintillationszählungen und zweitens auf photographischem Wege. In diesem Abschnitte soll die Szintillationsmethode und ihre Resultate besprochen werden. Die beschriebene experimentelle Anordnung konnte dafür ohne weiteres übernommen werden. Mit der Zählung der Szintillationen wurde meistens im geometrischen Spaltbilde begonnen. Mit der ersten gezählten Szintillation wurde die Stoppuhr in Tätigkeit gesetzt, mit der letzten gezählten abgestellt und die Zeit abgelesen. Eine solche Einzelbeobachtung wurde an jeder Stelle so oft wiederholt, bis der Mittelwert der pro Minute auftreffenden Szintillationen genügend sichergestellt schien. Dann wurde das Mikroskop um einen gemessenen Betrag, etwa einen halben oder einen ganzen Millimeter, in der Vertikalen verschoben und das obige Verfahren wiederholt. In dieser Weise wurde die Ausdehnung des Szintillationsgebietes in der Vertikalen untersucht bis zur Grenze,

wo nur noch selten eine Szintillation zu beobachten war. Daß man am Rande überhaupt niemals mehr eine Szintillation wahrnahm, war wegen der stets in geringer Zahl auftretenden großen Ablenkungen nicht der Fall. Auf diese Weise gewann man eine Verteilungskurve der Szintillationen in der Senkrechten zur Spaltrichtung.

Sollte die Abhängigkeit der Zerstreuung von der Ausgangsgeschwindigkeit untersucht werden, so wurde diese Ausgangsgeschwindigkeit durch Vorschaltung von Aluminiumfolien direkt vor das Präparat in berechenbarer Weise herabgesetzt. Die Dicke dieser und der untersuchten Folien wurde durch Messung ihrer Bremswirkung ermittelt. „Bremswirkung“ oder „Luftäquivalent“ ist die in Zentimeter ausgedrückte Strecke, um welche die Reichweite der α -Teilchen in Luft beim Einschalten der betreffenden Folie herabgesetzt wird. Aus der Proportionalität¹⁾ von Dicke und Bremswirkung läßt sich, wenn zwei zusammengehörige Werte²⁾ von Bremswirkung und Dicke gegeben sind, jede andere Dicke aus der Bremswirkung berechnen. Zur Ermittlung der Bremswirkung diente folgender Apparat (Fig. 4). An der einen

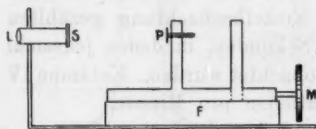


Fig. 4.

Säule des Funkenmikrometers F war ein Poloniumpräparat P befestigt. Ihm gegenüber befand sich unbeweglich der Sidotblendeschirm S , der durch die Linse L beobachtet werden konnte. Die Verschiebungen des Präparats in der Horizontalen konnten an der Mikrometerschraube M auf $\frac{1}{200}$ mm genau abgelesen werden. Es wurde zuerst die Stellung des Präparats ermittelt, in welcher die α -Teilchen den Schirm noch trafen, dann die Folie dicht an den Schirm gebracht, das Präparat so verschoben, daß wieder die α -Teilchen den Schirm gerade er-

1) Vgl. z. B. W. Bragg, Phil. Mag. 8. p. 719ff. 1904.

2) Diese Werte sind entnommen aus: W. Bragg u. H. Kleemann, Phil. Mag. 8. p. 726. 1904.

reichten. Die Differenz der beiden Stellungen ergibt die Bremswirkung. Natürlich wurde das Verfahren einige Male wiederholt und das Mittel genommen.

Um ein ins einzelne gehendes Beispiel einer Zerstreuungsmessung zu geben, sei hier eine Tabelle für 1 Glimmerfolie von 0,92 cm Bremswirkung angeführt.

I	II	III	IV
9	4	122;	2
11	20	73; 53; 57; 62; 76; 58; 60; 63;	19,1
12	50	60; 72; 75; 53; 61; 53; 68; 64;	47,5
13	100	47; 38; 41; 39; 49; 50; 53; 40;	134
14	100	35; 31; 33; 34; 30; 26; 40; 35;	182
15	100	57; 64; 63; 41; 42; 43; 51; 45;	118
16	30	50; 55; 40; 53; 40; 54; 38; 51;	37,8
17	15	53; 45; 52; 68; 46; 55; 71; 52;	16,3
19	3	115;	1,6

Gesamtzahl der Szintillationen: 3327.

Kolumne I gibt in der bekannten Weise die Stellung des Mikroskops an. Kolumne II enthält die Zahl der an jeder Stelle bei jeder Einzelbeobachtung gezählten Szintillationen, Kolumne III die Sekunden, in denen jedesmal diese Zahl von Szintillationen beobachtet wurden. Kolumne IV gibt den Mittelwert der Szintillationen pro Minute.

Es ist klar, daß sich das große von mir gesammelte Material auch zur Prüfung der Wahrscheinlichkeitsgesetze auf die zeitliche Verteilung der Szintillationen verwenden ließe.

In dieser Weise wurden nun Folien von *Platin*, *Gold*, *Silber*, *Kupfer*, *Aluminium* und *Glimmer* untersucht. Die Platinfolien wurden von Heraeus in Hanau bezogen, der auch die Goldfolien in Form von Wollastonblechen lieferte.¹⁾ Silber-, Kupfer- und Aluminiumfolien stammen aus der Firma Trumpp in Nürnberg. Die Glimmerfolien wurden durch Spalten des gewöhnlichen, käuflichen Kaliglimmers (Muscovit) erhalten.

Trägt man Kolumne I als Abszisse, Kolumne IV als Ordinate auf und verbindet die einzelnen Punkte durch eine

1) Es mußte also jedesmal der Silberüberzug durch Einlegen in sehr verdünnte Salpetersäure gelöst werden.

Kurve, so stellt diese die Verteilungskurve der Szintillationen dar. Die direkt auf diese Weise gewonnenen Kurven sind nicht immer miteinander vergleichbar, weil, wie oben erwähnt, mit verschieden großem Gesichtsfeld gearbeitet wurde. Zur Veranschaulichung sind in Fig. 5 vier solche Kurven gezeichnet, die aber zuerst auf gleichen Flächeninhalt, d. h. auf gleiche

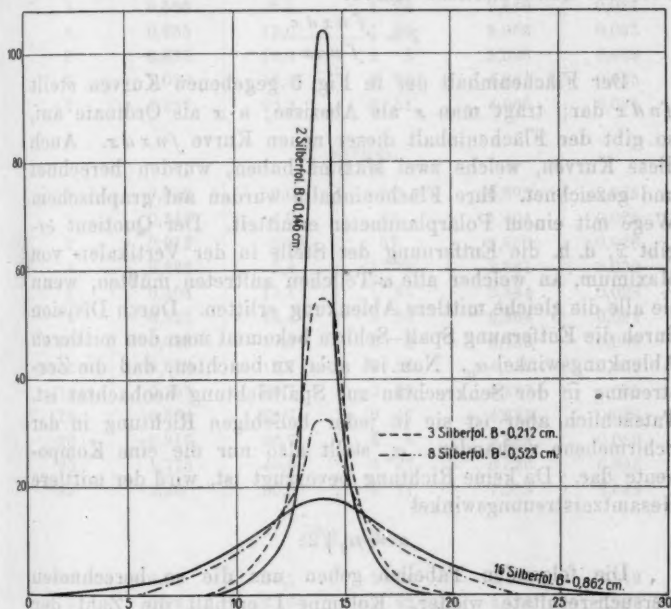


Fig. 5.

Gesamtzahl der gezählten Szintillationen umgerechnet sind (B = Bremswirkung). Man sieht, die Kurven sind alle von ähnlicher Form, die, welche einer größeren Zerstreuung entsprechen, breiter und abgeflachter.

Auf diese Weise wurden sämtliche Messungen in Kurvenform wiedergegeben. Als Maß für die Zerstreuung wurde daraus der *mittlere Winkel* berechnet, um den ein α -Teilchen beim Passieren der Folie aus seiner Bahn abgelenkt wird, nach folgendem Verfahren.

Nehmen wir die Abszisse x von der Mittellinie der Kurve aus nach rechts und links, so gehört zu jedem x rechts und links eine bestimmte Ordinate n . Für eine endliche Anzahl diskreter Punkte wird der Mittelwert von x :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}.$$

Für eine kontinuierliche Kurve:

$$\bar{x} = \frac{\int n x dx}{\int n dx}.$$

Der Flächeninhalt der in Fig. 5 gegebenen Kurven stellt $\int n dx$ dar; trägt man x als Abszisse, $n \cdot x$ als Ordinate auf, so gibt der Flächeninhalt dieser neuen Kurve $\int n x dx$. Auch diese Kurven, welche zwei Maxima haben, wurden berechnet und gezeichnet. Ihre Flächeninhalte wurden auf graphischem Wege mit einem Polarplanimeter ermittelt. Der Quotient ergibt \bar{x} , d. h. die Entfernung der Stelle in der Vertikalen von Maximum, an welcher alle α -Teilchen auftreten müßten, wenn sie alle die gleiche mittlere Ablenkung erlitten. Durch Division durch die Entfernung Spalt-Schirm bekommt man den mittleren Ablenkungswinkel α_0 . Nun ist aber zu beachten, daß die Zerstreuung in der Senkrechten zur Spaltrichtung beobachtet ist. Tatsächlich aber ist sie in jeder beliebigen Richtung in der Schirmebene vorhanden. α_0 stellt also nur die eine Komponente dar. Da keine Richtung bevorzugt ist, wird der mittlere Gesamtzerstreuungswinkel

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{2}.$$

Die folgenden Tabellen geben uns die so berechneten Versuchsergebnisse wieder. Kolumne I enthält die Zahl der Folien, Kolumne II ihre Bremswirkung B , III die daraus berechnete Dicke D , IV den mittleren Ablenkungswinkel α im Winkelmaß, V im Bogenmaß. Die Bedeutung der Kolumne VI soll später angegeben werden.

1. Platin.

I	II	III	IV	V	VI
	$B \text{ cm}$	$D \cdot 10^8 \text{ cm}$	α	$\alpha \text{ abs.} \cdot 10^3$	δ°
1	0,9	16,8	2° 29'	3,946	0,088
2	1,8	33,5	4 5	7,146	0,044
3	2,7	50,0	5 42	10,04	0,050

2. Gold.

I	II	III	IV	V	VI
	B cm	$D \cdot 10^5$ cm	α	α abs. $\cdot 10^3$	δ°
1	0,187	3,57	43'	1,244	0,023
2	0,366	6,98	1° 27'	2,538	0,034
3	0,550	10,5	1 24	2,448	0,027
4	0,685	13,0	1 56	3,362	0,033
5	0,837	16,0	2 3	3,593	0,032
6	1,036	19,8	2 31	4,381	0,035
7	1,327	25,3	2 51	4,985	0,035

3. Silber.

1	0,073	2,0	31'	0,893	0,023
2	0,146	4,01	48	1,404	0,025
3	0,212	5,83	57	1,650	0,026
4	0,269	7,4	1° 18'	2,281	0,030
6	0,404	11,1	1 27	2,544	0,028
8	0,523	14,4	1 56	3,364	0,032
10	0,683	17,5	2 8	3,736	0,032
12	0,679	18,7	2 26	4,242	0,036
14	0,753	20,7	2 29	4,327	0,035
16	0,862	23,7	2 47	4,845	0,036
20	0,917	26,7	3 5	5,396	0,038
30	1,775	48,8	3 37	6,822	0,033
40	2,20	60,5	4 11	7,318	0,040

4. Kupfer.

6	0,82	20,1	1° 24'	2,433	0,019
6	0,94	23,0	2 22	4,129	0,030
12	1,80	44,1	2 30	4,357	0,022

5. Aluminium.

1	0,54	23,6	36'	1,052	0,0044
2	0,88	43,3	1° 9'	2,008	0,0073
3	1,33	73,1	1 38	2,859	0,0076

6. Glimmer.

1	0,92	43,8	58'	1,701	0,0887
1	0,995	47,3	1° 3'	1,835	0,010
2	1,92	91,1	1 58	3,443	0,012

Diese Tabellen sind in Fig. 6 ebenfalls in Kurvenform dargestellt. Die Abszissen bedeuten die Dicken $\times 10^6$, die Ordinaten die mittleren Gesamtzerstreuungswinkel.

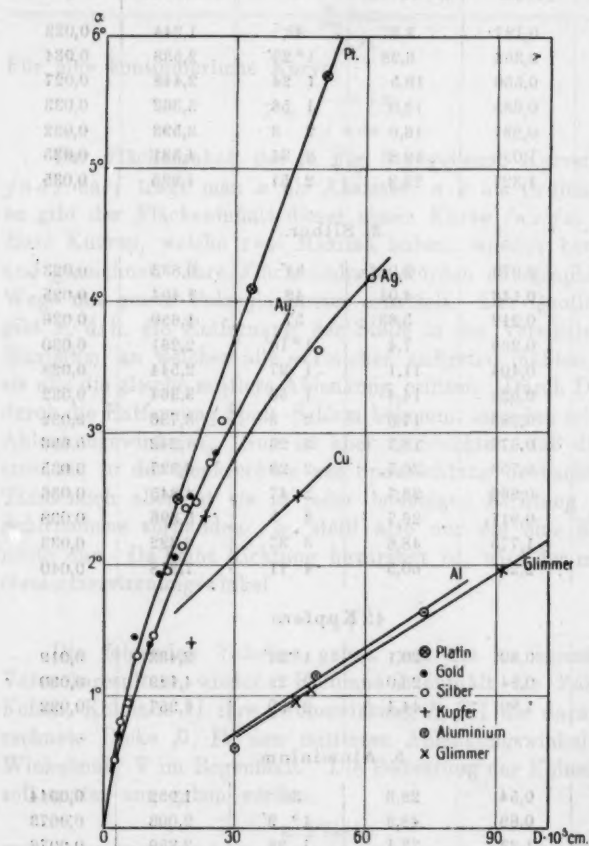


Fig. 6.

Die Abhängigkeit der Zerstreuung von der Geschwindigkeit zeigt folgende Tabelle.

1. Platinfolie. Bremswirkung 0,9 cm.

$v_0 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$v_1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	α	αv_1^2	αv_1^3
1,62	1,55	$2^\circ 29'$	3,6	5,6
1,55	1,475	3 4	4,0	5,9
1,48	1,395	3 18	3,9	5,4

Die erste Kolumne gibt die Ausgangsgeschwindigkeit v_1 der α -Strahlen, die durch Vorschaltung der Aluminiumfolie herabgesetzt werden konnte. Nun erleidet das α -Teilchen aber auch beim Passieren der Platinfolie einen beträchtlichen Geschwindigkeitsverlust, der sich aus der Bremswirkung dieser Folie berechnen läßt.¹⁾

Die Geschwindigkeit v nach Passieren der Folie ist zu bestimmen aus $v^3 = a \cdot (R - x)$, dabei ist a eine numerische Konstante, R die Reichweite, x die Bremswirkung.

a ist für α -Strahlen des Polonium bestimmt durch

$$1,62^3 = a \cdot 3,86.$$

Infolgedessen läßt sich aus obiger Formel v berechnen. Man nimmt dann als mittlere Geschwindigkeit den Mittelwert v_1 aus v und v_0 , der in Kolumne II gegeben ist. Kolumne III gibt den mittleren Zerstreuungswinkel der Folie an. Kolumne IV bzw. V enthält bis auf einen konstanten Faktor das Produkt αv_1^2 bzw. αv_1^3 . Die Zahlen in jeder der beiden Kolumnen sind unter sich ziemlich konstant. Berechnet man die Produkte αv_1 und αv_1^4 , so ist die Übereinstimmung viel weniger gut. Man wird also sagen können: die Zerstreuung ist umgekehrt proportional v^n , wobei $2 \leq n \leq 3$.

Aus den Tabellen p. 954—955 oder aus Fig. 6 folgt, daß für größere Dicken der Folien die Zerstreuung linear mit der Dicke zunimmt. Für kleinere Dicken (vgl. Gold und Silber) gilt eine andere Beziehung. Diese ergibt sich im Zusammenhang mit der Erklärung von Kolumne 6 dieser Tabellen. δ° bedeutet den in Grad ausgedrückten mittleren Atomzerstreuungswinkel, d. h. den Winkel, um welchen ein α -Teilchen im Mittel

1) Vgl. z. B. H. Geiger, Physik. Zeitschr. 11. p. 687. 1910.

beim Passieren eines Atoms abgelenkt wird. δ^0 läßt sich aus Wahrscheinlichkeitsberechnungen ermitteln.

Wenn μ Versuche unter denselben Bedingungen angestellt werden und p die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des einen Ereignisses, q die des Gegenteiles ist, so beträgt die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung im Betrage h vom Mittelwert:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} \cdot 1)$$

Angewendet auf die Zerstreuung wird die Wahrscheinlichkeit, der Gesamtwinkel liege zwischen h und $h + dh$, gleich

$$\frac{2\bar{\delta}_0}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} \cdot dh,$$

wobei $\bar{\delta}_0$ die eine Komponente des Atomzerstreuungswinkels darstellt.

Für unsern Fall wird $p = q = \frac{1}{2}$, denn die Wahrscheinlichkeit einer Ablenkung nach oben oder unten ist gleich groß. Demnach wird die vertikale Komponente $\bar{\alpha}$ des mittleren Gesamtzerstreuungswinkels

$$\bar{\alpha} = \frac{2\bar{\delta}_0 \int_0^\infty h \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu \frac{\pi}{2}}} \cdot e^{-\frac{h^2}{\mu/2}} dh}{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\mu \frac{\pi}{2}}} e^{-\frac{h^2}{\mu/2}} \cdot dh}$$

Die Integration ergibt

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} \bar{\delta}_0$$

oder für die Gesamtzerstreuung ($\alpha^0 = \bar{\alpha} \sqrt{2}$, $\delta^0 = \bar{\delta}_0 \sqrt{2}$)

$$\alpha^0 = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} \delta^0.$$

1) Vgl. z. B. E. Pascal, Repertorium d. höh. Math. 1. Aufl. Abschnitt über Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Für μ ist die Zahl der getroffenen Atome $= n$ zu setzen. Demnach lautet die Schlußformel

$$(14) \quad \alpha = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \cdot \delta^0.$$

(14) gestattet, aus dem experimentell gefundenen α δ^0 zu berechnen, wenn n bekannt ist. Handelt es sich um einatomige Substanzen mit dem Atomgewicht A und der Dichte ρ , so ist die Anzahl Atome im cm^3

$$n_1 = \frac{6,2 \cdot 10^{23} \cdot \rho}{A}.$$

Auf eine Länge D cm entfallen somit:

$$\sqrt[3]{\frac{6,2 \cdot 10^{23} \cdot \rho}{A} \cdot D} \text{ Atome.}$$

Machen wir nun die Annahme, das α -Teilchen treffe beim Passieren einer Folie so viel Atome, als bei gleichmäßiger Verteilung auf einer Länge gleich der Foliendicke liegen, so ist für n in (14) obiger Wert zu setzen. Es wird

$$(15) \quad \alpha = \delta^0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{6,2^{1/2} \cdot 10^{23/2} \cdot \rho^{1/2}}{A^{1/2}} \cdot \sqrt{D}.$$

Nach dieser Formel sind die Zahlen in Spalte 6 der Tabellen p. 954—955 berechnet.

Formel (15) zeigt, daß die Zerstreuung proportional mit der Quadratwurzel aus der Foliendicke sein muß, das ist mit großer Genauigkeit erfüllt für die drei ersten Silberfolien in Tab. 3 p. 955.

Silber.

	$D \cdot 10^4$	$\alpha \text{ abs.} \cdot 10^3$	$\frac{\alpha}{\sqrt{D}}$
1 Fol.	20	0,89	2,0
2 "	40	1,40	2,2
3 "	58	1,65	2,2

Die Konstanz der Werte der letzten Spalte zeigt, daß das Experiment obige theoretische Folgerung bestätigt. Für größere Foliendicken wird die Abhängigkeit eine lineare. Wenn man jedoch in Fig. 6 die Kurven nach rückwärts verlängert, so sieht man, daß sie alle die positive Ordinatenachse

treffen. Das zeigt, daß für alle untersuchten Substanzen bei sehr kleinen Dicken ein ähnliches Verhalten wie bei Silber zu erwarten ist. Daß das Wurzelgesetz für große Dicken nicht mehr gilt, rührt jedenfalls daher, daß der vom α -Teilchen in der Folie zurückgelegte Weg wesentlich größer ist als D selbst. Diese Resultate sind in wesentlicher Übereinstimmung mit denen von H. Geiger.

VI. Photographische Zerstreungsmessungen.

Es wurde ferner auf photographischem Wege die Zerstreung der α -Strahlen untersucht. Dazu mußte die photographische Wirkung der α -Teilchen überhaupt noch einmal studiert werden. Eingehende Untersuchungen darüber liegen vor von Kinoshita.¹⁾ Als hauptsächlichstes Resultat seiner Arbeit sei erwähnt, daß die Schwärzung der photographischen Platte vom Anfang bis zum Ende der Reichweite konstant bleibt und dann plötzlich auf Null herabsinkt. Das ist ein bemerkenswerter Unterschied gegenüber der Ionisationskurve. Die Größe der Silberköner hängt auch nicht von der Zahl der α -Teilchen ab, von denen sie getroffen wurden, sondern nur von der kürzeren oder längeren Entwicklung. Man muß sich den Vorgang also so denken, daß das α -Teilchen eine ionisierende Wirkung auf das Silbersalz ausübt, die in jedem Falle ausreicht, um bei der Entwicklung das Silberkorn auszufällen.

Kinoshitas Resultate haben sich bei unseren Vorversuchen in sehr schöner Weise bestätigt. Zuerst mußte eine geeignete Plattensorte und eine passende Entwicklungsmethode ausfindig gemacht werden. Für diesen Zweck wurden eine große Menge Probestücke hergestellt. Ein Poloniumpräparat wurde so eingeschlossen, daß die α -Strahlen durch eine bestimmte Öffnung austreten konnten und diese Vorrichtung nahe an die photographische Platte herangebracht. Die Expositionszeit war in den einzelnen Fällen sehr verschieden. Dann wurde die Platte entwickelt und untersucht. Die Platte mußte, wenn sie brauchbar sein sollte, absolut schleierfrei bleiben, d. h. sie durfte auch bei mikroskopischer Untersuchung an

1) S. Kinoshita, Proc. Roy. Soc. A. 83. p. 432 ff. 1910.

den nicht exponierten Stellen keine oder nur wenige ausgefällte Silberkörner aufweisen. Diese Forderung ist äußerst schwer zu erfüllen. In gewöhnlichem Sinne schleierfreie Platten sind für diesen Zweck noch total unbrauchbar. Eine große Zahl von Platten und Papieren, und eine ganze Reihe Entwickler wurden durchprobiert. Schließlich erwiesen sich zwei Plattensorten aus der Firma Richard Jahr in Dresden als geeignet, die „Photomechanische Platte“ und die „Sigurddiapositivplatte“, und als Entwickler Brenzkatechin nach den Angaben von Baisch.¹⁾ In der Folge wurde also nur mit diesen Platten und diesem Entwickler gearbeitet.

Im Laufe dieser lange Zeit in Anspruch nehmenden Versuche stellte sich nun folgendes interessante Resultat heraus.²⁾

Wenn die α -Teilchen möglichst streifend auf die Platte auftreffen, so zeigt sich bei der Betrachtung der Platte nach der Entwicklung in einem Mikroskop von etwa 500 facher Vergrößerung ein Bild wie das in den zitierten Abhandlungen gegebene, das mit einem mikroskopischen Zeichenapparat von der Platte abgenommen wurde. Die α -Teilchen sind daselbst ungefähr wagrecht auf die Platte aufgetroffen. Man sieht dann in der horizontalen Projektion der Bahn des α -Teilchens nicht ein Silberkorn ausgefallen, sondern eine ganze Reihe, in einigen Fällen bis zu 15 Pünktchen hintereinander. Die Erscheinung erklärt sich so, daß das α -Teilchen bei seinem nicht unbedeutlichen Wege in der Gelatine nacheinander eine Reihe von Silberkörnern getroffen und zur Entwicklung angeregt hat. Es ist auf diese Weise die Bahn eines einzelnen α -Teilchens objektiv sichtbar gemacht.³⁾ Die kleinen, aber deutlichen unregelmäßigen Krümmungen, die diese Bahnen manchmal aufweisen, zeigen in ganz eklatanter Weise den auch hier auftretenden Skatteringeffekt. Zugleich läßt sich die photographische Wirkung des einzelnen α -Teilchens längs seiner Bahn verfolgen. Größe und Form der Silberkörner weisen wenig Unterschied

1) Baisch, Ann. d. Phys. 35. p. 565. 1911.

2) Beobachtet von M. Reinganum, mitgeteilt Phys. Zeitschr. 12. p. 1076—1077. 1911; Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 13. p. 848—849. 1911.

3) Neuerdings bestätigt und weiter untersucht von W. Michl, Wien. Ber. 121. Abt. 2a. p. 1431. 1912.

auf. Das bestätigt die Resultate von Kinoshita, daß die photographische Wirkung längs der Bahn des α -Teilchens konstant bleibt. Diese Erscheinung gibt dieser Auffassung eine wesentliche, am einzelnen α -Teilchen demonstrierte Stütze. Fig. 7 ist eine Mikrophotographie einer solchen Plattenstelle, die Hr. Prof. G. Meyer anzufertigen so freundlich war.

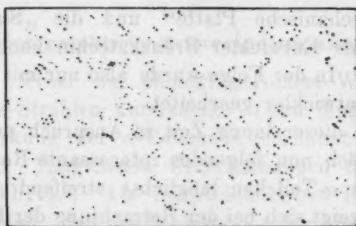


Fig. 7.

Für die photographischen Hauptversuche konnte die frühere experimentelle Anordnung im wesentlichen übernommen werden. Nur mußte natürlich jetzt an Stelle des Zinksulfidschirmes die Apparatur zur photographischen Aufnahme treten. Das wurde in folgender Weise gemacht (vgl. nachstehende Fig. 8).

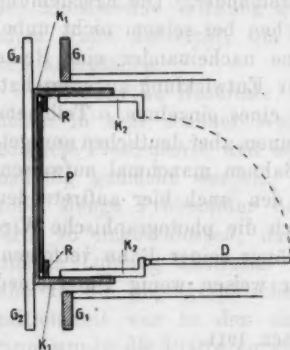


Fig. 8.

Die Zeichnung stellt einen horizontalen Längsschnitt durch den Endteil des Apparates dar, welcher vorher den Zinksulfidschirm trug, die quadratische Abschlußplatte G_1 ist nun kreisförmig durchbohrt. Auf sie aufgeschliffen ist eine zweite Platte G_2 , quadratisch und gleich groß. Diese trägt aufgekittet den einen Teil K_1 der Kassette. Der zweite Teil K_2 paßt genau in den ersten. Die photographische Platte P wird auf den Boden von K_1 gelegt, zwei Stifte in diesem Boden halten die Platte in ihrer richtigen Lage, darauf kommt ein flacher Kreisring, dessen zwei Teile R

im Schnitt sichtbar sind. Dann wird der Teil K_2 hereingeschoben. Dieser Teil trägt den Deckel D . Der Deckel D ist aus Eisen, die anderen Teile der Kassette aus Messing gefertigt. Alle Teile sind geschwärzt, um Störungen durch fremdes Licht soviel als möglich zu vermeiden. Die Figur zeigt K_2 etwas aus K_1 herausgeschoben.

Diese Versuche mußten natürlich im vollständig verdunkelten Zimmer geschehen. Es wurden außerdem alle Vorichtsmaßregeln getroffen, um den Apparat vor jedem fremden Licht zu schützen.

Die photographischen Platten wurden uns von Jahr in Dresden, schon in der nötigen Form 20×42 mm zugeschnitten, geliefert. Wenn nun ein Spaltbild oder eine Aufnahme mit vorgesetzter Folie gemacht werden sollte, wurde in folgender Weise verfahren.

Die Platte wurde in K_1 eingesetzt, der Ring R darauf gelegt und K_2 eingeschoben. Der Deckel D schloß die Kassette ab. Dann wurde die Platte G_2 mit der Kassette auf die Platte G_1 aufgedrückt, die zur Dichtung vorher mit einer Schicht Schliffett überdeckt war. Dann wurde die Pumpe in Tätigkeit gesetzt. Sobald der Druck genügend niedrig war, wurde der Deckel D , der um ein Scharnier mit vertikaler Achse drehbar war, durch einen Magneten geöffnet. Die Kassette lag nun so, daß die Längsrichtung der photographischen Platte senkrecht zur Spalt- und Präparatrichtung war. Die Exposition dauerte in den einzelnen Fällen verschieden lang, meistens zwischen 1 und 2 Stunden. Nach beendeter Exposition wurde durch rasches Drehen von G_2 die Kassette geschlossen, Atmosphärendruck hergestellt, die Platte herausgenommen, entwickelt und fixiert.

Es stellte sich bald heraus, daß der bei den Szintillationszählungen verwendete Spalt zu schmal war, um eine ausreichende photographische Wirkung zu ermöglichen. Denn die bei der notwendigen starken Vergrößerung beobachtbaren Flächen sind sehr klein und die Punktzahl zu gering. Es wurde deshalb ein neuer breiterer Spalt angefertigt. Auch das Poloniumpräparat, das im Laufe der Zeit bedeutend schwächer geworden war, wurde durch ein in seinen Dimensionen gleiches, stärkeres ersetzt. Um schließlich zu vermeiden, daß eventuelle

radioaktive Verunreinigungen, die der Apparat bei seinem langen Gebrauche erlitten haben konnte, auf die photographischen Aufnahmen störend wirkten, wurde der Apparat durch einen neuen ersetzt, der aber im übrigen genau so konstruiert war wie der alte. Das Poloniumpräparat wurde dann nach jeder Aufnahme sorgfältig herausgenommen, um jede derartige Störung zu vermeiden.

Es wurde in der beschriebenen Weise eine Reihe von Spaltaufnahmen gemacht und die Zerstreuung einzelner Folien zu messen versucht. Die folgende Tabelle gibt ein Beispiel der Ausmessung eines solchen Spaltbildes. Die Zählung der Pünktchen geschah mit einem Fuessschen Mikroskop mit Zeisscher Optik und Kreuzschlittentisch. Das Okular enthielt eine quadratische Netzteilung. Die Platten wurden in mehreren Parallelstreifen ausgemessen.

I	II	III	IV
12 mm	25	24	19
11	23	21	14
10,8	26	28	19
10,7	43	16	24
10,6	52	44	22
10,5	53	46	40
10,0	50	54	42
9,5	49	42	53
9,4	21	42	42
9,3	24	28	23
9,2	22	18	22

Spalte I gibt die Stellung des Mikroskops in Millimetern, II die Zahl der Silberkörner im Gesichtsfeld, III und IV dasselbe für zwei andere Parallelstreifen. Die Tabelle gibt eine Vorstellung von der Lage und Ausdehnung des geometrischen Spaltbildes. Völlig schleierfrei ist auch diese Platte nicht. Dabei ist aber zu bedenken, daß die lange Expositionszeit im Vakuum die Platte überhaupt sehr ungünstig beeinflusste. Die Möglichkeit, daß der Schleier durch δ -Strahlung veranlaßt sein könnte, wurde geprüft durch Bedeckung eines Teiles der Platte mit Metallfolie, aber auch hier zeigte sich kein Unterschied.

Auch auf den Platten, auf welchen die Zerstreuung von Folien gemessen wurde, konnte dieser Schleier nicht vermieden werden. Die Auszählung geschah genau in der eben geschilderten Weise. Um dann aus den gewonnenen Zahlen eine Kurve, wie die der Szintillationsverteilung zu gewinnen, wurde von all den Stellen, wo die α -Teilchen nicht mehr auftreffen konnten, das Mittel der Pünktchenzahl genommen und dieser Wert überall abgezogen. So bekam man eine Kurve, die ganz analog den Kurven für die Szintillationsverteilung war. Daraus konnte nun der mittlere Zerstreuungswinkel für die Folie in genau derselben Weise wie oben berechnet werden. Es folgen aus der Reihe der Aufnahmen nur die besten. Die experimentellen Schwierigkeiten dieser Methode sind sehr groß, so daß ein Teil der Platten keine brauchbaren Resultate ergab.

Es wurde gefunden:

1 Aluminiumfolie, Bremsw. 0,54 cm	$\alpha = 55'$
2 Aluminiumfolien, „ 0,88 cm	$\alpha = 1^\circ 13'$
8 Kupferfolien, „ 1,17 cm	$\alpha = 56'$

Der Vergleich mit den Werten aus den Szintillationsbeobachtungen zeigt folgendes:

	α Szintill.	α Photogr.
1 Aluminiumfolie	36'	55'
2 Aluminiumfolien,	1° 9'	1° 13'
8 Kupferfolien ¹⁾	2° 5'	56'

Der Wert für Kupfer stimmt nicht mit dem früheren überein. Das mag zum großen Teil vielleicht daran liegen, daß es in manchen Fällen sehr schwer ist, festzustellen, wo bloße Schleierwirkung ist und wo die Wirkung der α -Teilchen sich geltend zu machen anfängt. Dagegen ist die Übereinstimmung der Werte für Aluminium wenigstens eine ungefähre. Es ist hiermit jedenfalls gezeigt, daß auch auf photographischem Wege die Zerstreuung der α -Strahlen festgestellt werden kann.

1) Der Wert für Kupfer nach der Szintillationsmethode ist aus Fig. 6 p. 956 interpoliert.

VII. Vergleich mit früheren Beobachtungen.

Quantitativ gemessen wurde die Zerstreuung der α -Strahlen, außer in der vorliegenden Arbeit, von Geiger.¹⁾ Er nimmt als Maß für die Zerstreuung den wahrscheinlichsten Winkel, um den ein α -Teilchen abgelenkt wird. Der wahrscheinlichste Winkel ist etwas kleiner als der zugehörige mittlere Winkel. Die Differenz ist aber nicht sehr bedeutend. Bei der Geigerschen Anordnung (punktförmige Strahlenquelle — kreisförmige Öffnung) liegt es nahe, den wahrscheinlichsten Winkel als Maß zu verwenden. Die Anordnung, wie sie in dieser Untersuchung verwendet wurde, legt dagegen die Wahl des mittleren Winkels näher. Dieser ist von Zufälligkeiten in der Form der Kurven (Fig. 5) unabhängiger als der wahrscheinliche, erfordert aber Beobachtungen über ein größeres Gebiet. Die hier gefundenen Resultate stimmen mit denen Geigers in weitgehender Weise überein. Die Quotienten aus wahrscheinlichstem Winkel und Bremswirkung einer Folie nennt Geiger „Zerstreuungskoeffizienten“. Dieser gibt ein Maß für die Zerstreuung der einzelnen Materialien. Dieser Koeffizient K ist nach Geiger proportional der Quadratwurzel aus dem Atomgewicht. Nehmen wir nun in Fig. 6 die Abszissen, die für jedes Material 1 cm Bremswirkung entsprechen und nennen die dazu gehörigen Ordinaten ebenfalls „Zerstreuungskoeffizienten“, so gilt auch für diese Zahlen Proportionalität mit der Wurzel aus dem Atomgewicht. Zum Vergleich seien die Werte in Tabellenform wiedergegeben (A = Atomgewicht, K = Zerstreuungskoeffizient).

	Geiger			Verfasser	
	A	K	K/\sqrt{A}	K	K/\sqrt{A}
Platin	195	—	—	2,6 ⁰	0,19
Gold	197	2,1 ⁰	0,150	2,4	0,17
Zinn	119	1,5	0,138	—	—
Silber	108	1,5	0,144	2,8	0,27
Kupfer	64	1,1	0,138	1,9	0,24
Aluminium	27	0,6	0,115	1,3	0,25
Glimmer ²⁾	19	—	—	1,0	0,23

1) H. Geiger, l. c.

2) Das mittlere Atomgewicht des Glimmers (Muscovit) ist aus seiner chemischen Zusammensetzung berechnet.

Daß die Werte für K hier an und für sich größer sind als bei Geiger, rührt, abgesehen vom Unterschiede zwischen mittlerem und wahrscheinlichstem Winkel, daher, daß die α -Strahlen des Poloniums geringere Anfangsgeschwindigkeit haben als die des RaC.

Bemerkenswert ist auch, daß eine nichtmetallische Substanz, Glimmer sich vollkommen in der Reihe der Metalle einfügt.

Die lineare Abhängigkeit der Zerstreuung von der Foliendicke und das abweichende Verhalten dünner Folien ist auch von Geiger festgestellt worden. Er hat auch das theoretische Wurzelgesetz für dünne Folien bereits aufgestellt, aber quantitativ nicht sehr genau bestätigen können. Das ist hier für dünne Silberfolien in ausreichender Weise geschehen.

Sieht man von der jedenfalls geringen Differenz zwischen mittlerem und wahrscheinlichstem Winkel ab, so läßt sich aus dem Vergleich der Größe K auch ein Schluß auf die Abhängigkeit der Zerstreuung von der Geschwindigkeit ziehen. Die Anfangsgeschwindigkeit der α -Teilchen von RaC ist $2,06 \cdot 10^9$ cm/sec. Nun befand sich bei der Geigerschen Anordnung vor der Strahlenquelle ein Glimmerblättchen von 1,46 cm Bremswirkung. Dadurch ist die in Betracht kommende Ausgangsgeschwindigkeit herabgesetzt auf $1,92 \cdot 10^9$ cm/sec, nach Zurücklegung von 1 cm in Luft ist sie $1,80 \cdot 10^9$ cm/sec. Der Mittelwert ist $v = 1,86 \cdot 10^9$. Für Polonium ergibt dieselbe Rechnung $v = 1,54 \cdot 10^9$ cm/sec.

Es ergibt sich dann folgende Tabelle:

	Geiger ($v = 1,86 \cdot 10^9$)		Verfasser ($v = 1,54 \cdot 10^9$)	
	K	$K \cdot v^3$	K	$K \cdot v^3$
Gold	2,1°	136	2,4°	88
Silber	1,5	97	2,8	102
Kupfer	1,1	71	1,9	70
Aluminium	0,6	39	1,3	47

Die ungefähre Übereinstimmung der Produkte $K \cdot v^3$ für jedes einzelne Metall läßt den Schluß zu, daß die Zerstreuung umgekehrt proportional ist der dritten Potenz der Geschwin-

digkeit, eine Folgerung, die auch Geiger gefunden hat und die mit der auf p. 957 durchaus im Einklang steht. Ein genaues Gesetz läßt sich hieraus natürlich nicht ableiten, weil einmal die Größe K in beiden Fällen nicht ganz dasselbe bedeutet und außerdem mit einem Mittelwert v gerechnet werden mußte.

VIII. Anwendung auf die Theorien.

Vergleichen wir nun die Resultate mit den aus den theoretischen Formeln (6) und (8) errechneten Werten, so ergibt sich für den Atomzerstreuungswinkel δ in Graden

	δ beob.	δ ber. aus (6)	δ ber. aus (8)
Gold	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
Silber	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
Aluminium	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$

Falls also die Voraussetzungen der Formel (6) zutreffen, macht die Wärmezestreuung nur einen unmeßbar kleinen Bruchteil der Gesamtzerstreuung aus. Dagegen zeigen die Werte für δ aus (8), daß sie mit den beobachteten wohl vergleichbar sind. Auch hier beträgt die Wärmezestreuung nur einen Bruchteil der ganzen, für Gold und Silber ungefähr $\frac{1}{20}$, für Aluminium $\frac{1}{2}$. Dieser Bruchteil ist dann proportional der zweiten Wurzel aus der absoluten Temperatur. Bei der experimentellen Prüfung mißt man nun aber nicht diesen Bruchteil, sondern nur wieder seinen Temperaturkoeffizienten, der dann im Vergleich zur Gesamtzerstreuung viel kleiner ist. So ist es wohl möglich, daß trotz der bisherigen Ergebnislosigkeit der experimentellen Untersuchung eines Temperaturkoeffizienten doch ein solcher besteht. Es beträgt für Gold und Silber unter diesen Annahmen die Änderung der Gesamtzerstreuung innerhalb des verwendeten Temperaturintervalles nur etwa 3 Proz., bei Aluminium mehr, und hier sind tatsächlich auch am ehesten solche Andeutungen vorhanden. Es ist also sehr wohl möglich, daß ein Teil der Zerstreuung auf der Annahme der Molekularbewegung der durchdrungenen Materie durch die α -Teilchen beruht. Die Formeln (6) und (8) und die obige Tabelle

zeigen, daß die Temperaturzerstreuung mit abnehmendem Atomgewicht wächst. Die Gesamtzerstreuung nimmt dagegen mit abnehmendem Atomgewicht ab. Der prozentuale Anteil der Wärmezerstreuung ist also am größten bei Substanzen mit kleinem Atomgewicht zu erwarten.

Wenden wir nun noch die einzelnen Theorien auf die gefundenen Resultate an. Die Formel (9) von Riecke ist infolge der Unsicherheit der einzusetzenden Werte nicht ohne weiteres verwendbar.

Die Formel (12) von Thomson für den Atomzerstreuungswinkel Θ erlaubt, wenn man für Silber das experimentell gefundene $\Theta = 0,023^\circ$ einsetzt, die Zahl N_0 der Elektronen im Atom zu bestimmen. Es wird $N_0 = 59$.

Falls die Vorstellung, die Zahl der Elektronen im Atom sei gleich dem halben Atomgewicht, richtig ist, so würde dieses Resultat auf die Brauchbarkeit der Thomsonschen Formel schließen lassen.

Auch Formel (13) von Rutherford gestattet bei bekannter Größe der Zerstreuung die Berechnung der Elektronenzahlen. Wenn man annimmt, daß der dort definierte Winkel Φ ungefähr mit dem Zerstreuungskoeffizienten übereinstimmt, so folgt aus Formel (13):

	A = Atomgewicht	N = Elektronenzahl im Atom
Platin	195	86
Gold	197	82
Silber	108	78
Kupfer	64	49
Aluminium	27	28
Glimmer	19	18

Die Zahlen stimmen in der Größenordnung mit dem Atomgewicht überein. Ob nun $N = A$ oder $= A/2$ zu setzen ist, läßt sich dadurch nicht entscheiden.¹⁾

1) *Nachträgliche Anmerkung bei der Korrektur:* Die Herren Geiger und Marsden kommen in einer Abhandlung (Wien. Ber. 121. Abt. II a. p. 2361 ff. 1912), die mir erst jetzt bekannt wird und die sich auf Ablenkungen um große Winkel bezieht, ebenfalls zum Resultat, daß die Elektronenzahl im Atom von der Größenordnung des Atomgewichts ist. Sie finden $N = A/2$. Die Schwierigkeit, welche die Verfasser hatten,

IX. Zusammenfassung.

Es wurde die theoretische Möglichkeit dargetan, daß die Zerstreuung der α -Strahlen (Skatteringeffekt) mit wachsender Temperatur zunimmt. Experimentell konnte eine solche Zunahme nicht sicher festgestellt werden. Es kann dies daran liegen, daß die „Wärmezerstreuung“ nur einen Bruchteil der Gesamtzerstreuung ausmacht, wie ein Vergleich der theoretischen und der beobachteten Werte ergibt, so daß der Temperaturkoeffizient der Gesamtzerstreuung in der Grenze der Beobachtungsfehler bleibt.

Ferner wurden nach der Szintillationsmethode Zerstreuungskurven für Folien verschiedenen Materials und verschiedener Dicke bei gewöhnlicher Temperatur aufgenommen. Hierbei wurden die α -Strahlen des Poloniums verwendet. Die gefundenen Gesetzmäßigkeiten sind ähnlich wie die von Geiger festgestellten.

Messungen der Zerstreuung wurden auch photographisch ausgeführt. Bei den Vorversuchen ergab sich eine neue Methode der Sichtbarmachung der Bahnen der α -Teilchen durch die von ihnen hervorgerufenen Punktreihen (vgl. Reinganum, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. I. c.).

Die gefundenen Zahlenwerte wurden auf die Theorien von Thomson und Rutherford angewendet und führen zu dem Ergebnis, daß die Elektronenzahl im Atom von der Größenordnung des Atomgewichtes ist.

Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, Hrn. Professor Reinganum, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit ausgeführt wurde, für das lebhafte Interesse und die stete Förderung, die er der Untersuchung zuteil werden ließ, meinen herzlichen Dank auszusprechen. Ebenso danke ich Hrn. Geheimrat Professor Himstedt für die freundliche Überlassung der Hilfsmittel des physikalischen Instituts.

Freiburg i. B., April 1913.

eine genügende Zahl von Szintillationen zu erhalten, zeigt wohl deutlich den Vorteil unserer Versuchsanordnung mit Spalt und linienförmigen Präparaten.

(Eingegangen 28. April 1913.)

3. *Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen; von W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue.*¹⁾

(Hierzu Taf. I—IV, Figg. 1—10.)

Theoretischer Teil von M. Laue.

Barklas Untersuchungen in den letzten Jahren haben gezeigt, daß die Röntgenstrahlen in der Materie eine Zerstreuung erfahren, ganz entsprechend der Zerstreuung des Lichtes in trüben Medien, daß sie aber noch daneben im allgemeinen die Atome des Körpers zur Aussendung einer spektral homogenen Eigenstrahlung (Fluoreszenzstrahlung) anregen, welche ausschließlich für den Körper charakteristisch ist.

Andererseits ist schon seit 1850 durch Bravais in die Kristallographie die Theorie eingeführt, daß die Atome in den Kristallen nach Raumgittern angeordnet sind. Wenn die Röntgenstrahlen wirklich in elektromagnetischen Wellen bestehen, so war zu vermuten, daß die Raumgitterstruktur bei einer Anregung der Atome zu freien oder erzwungenen Schwingungen zu Interferenzerscheinungen Anlaß gibt; und zwar zu Interferenzerscheinungen derselben Natur, wie die in der Optik bekannten Gitterspektren. Die Konstanten dieser Gitter lassen sich aus dem Molekulargewicht der kristallisierten Verbindung, ihrer Dichte und der Zahl der Moleküle pro Grammmolekül, sowie den kristallographischen Daten leicht berechnen. Man findet für sie stets die Größenordnung 10^{-8} cm, während die Wellenlänge der Röntgenstrahlen nach den Beugungsversuchen von Walter und Pohl²⁾ und nach den Arbeiten von Sommerfeld und Koch³⁾ von der Größenordnung 10^{-9} cm sind. Eine erhebliche Komplikation freilich bedeutet es, daß bei den

1) Wenig veränderter Abdruck aus den Münchener Sitzungsber. 1912. p. 303.

2) B. Walter u. R. Pohl, Ann. d. Phys. 25. p. 715. 1908; 29. p. 331. 1908.

3) R. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 38. p. 473. 1912; P. P. Koch, Ann. d. Phys. 38. p. 507. 1912.

Raumgittern eine dreifache Periodizität vorliegt, während man bei den optischen Gittern nur in einer Richtung, höchstens (bei den Kreuzgittern) in zwei Richtungen periodische Wiederholungen hat.

Die Herren Friedrich und Knipping haben auf meine Anregung diese Vermutung experimentell geprüft. Über die Versuche und ihr Ergebnis berichten sie selbst im zweiten Teil der Veröffentlichung.

Die Theorie und ihr qualitativer Vergleich mit der Erfahrung.

Wir wollen den oben angedeuteten Gedanken mathematisch zu fassen suchen. Den Ort der Mittelpunkte der Atome bestimmen wir durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z , deren Achsenkreuz seinen Ursprung im Mittelpunkt eines beliebigen Atoms im durchstrahlten Teil des Kristalles hat. Das Raumgitter gehört dem allgemeinsten, d. h. triklinen Typus an; die Kanten seiner Elementarparallelepiped mögen also beliebige Längen haben und beliebige Winkel miteinander einschließen. Durch spezielle Wahl dieser Längen und Winkel kann man immer zu Raumgittern anderer Typen übergehen. Stellen wir diese Kanten nach Länge und Richtung durch die Vektoren a_1, a_2, a_3 dar, so liegen die Mittelpunkte eines Atoms an einem Ort

$$(1) \quad \begin{cases} x = m a_{1x} + n a_{2x} + p a_{3x} \\ y = m a_{1y} + n a_{2y} + p a_{3y} \\ z = m a_{1z} + n a_{2z} + p a_{3z} \end{cases}$$

wobei m, n, p positive oder negative, das Atom numerierende ganze Zahlen (einschließlich der Null) sind.

Für die Schwingung eines einzelnen Atoms wollen wir zunächst einmal die Annahme machen, daß sie rein sinusförmig verläuft. Dies kann hier natürlich ebensowenig wie in der Optik streng richtig sein. Aber ebenso wie in der Optik kann man spektral inhomogene Strahlung durch Fouriersche Zerlegung aus Sinusschwingungen zurückführen. Die von einem Atom ausgehende Welle können wir dann in großer Entfernung vom Atom darstellen durch den Ausdruck

$$(2) \quad \psi \frac{e^{-ikr}}{r},$$

wo r den Betrag des Radiumvektors vom Atom zum Aufpunkt bedeutet, Ψ eine Funktion seiner Richtung und $k = 2\pi/\lambda$ ist, wo λ die Wellenlänge der später interferierenden Röntgenstrahlen darstellt. Wäre, wie man es in der Optik gewohnt ist, das Atom klein gegen die Wellenlänge, so wäre Ψ eine Konstante.¹⁾ Hier aber muß man mit der Möglichkeit rechnen, und die Versuchsergebnisse legen die Vermutung nahe, daß infolge der mit der Wellenlänge vergleichbaren Abmessung des Atoms Richtungsunterschiede auftreten. Berücksichtigt man ferner noch, daß die anregende Schwingung in (als eben vorausgesetzten) Wellen mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitet, so sieht man, daß man noch den Faktor $e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$ hinzufügen muß, wenn $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungskosinus der einfallenden primären Röntgenstrahlen sind. Über Einzelheiten des Anregungsvorganges brauchen wir dabei keine weitere Voraussetzung zu machen, als daß er bei allen Atomen gleich erfolgt. Insbesondere ist es für den weiteren Verlauf des Vorganges vollkommen dasselbe, ob die Schwingungen im Atom durch Schwingungen gleicher Frequenz in der primären Strahlung erzwungen, oder ob es durch die primäre Strahlung einmal angeregte, sonst aber freie Eigenschwingungen sind. Stets finden wir als Superpositionseffekt aller Elementarwellen

$$(3) \quad \sum \Psi \frac{e^{-ik(r + x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}}{r}.$$

Wir berechnen diese Summe nur für Aufpunkte, deren Abstand sehr groß ist gegen die Abmessungen des durchleuchteten Kristallstücks, und benutzen die auch sonst in der Gittertheorie übliche Näherung, d. h. wir setzen für das r im

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Abb. 1, p. 331. Gehen von beliebig vielen, in einem endlichen Bereich liegenden Strahlungswellen Kugelwellen aus, so ist die Erregung in einem Punkte für welchen der Radiusvektor vom Mittelpunkt des Bereiches den gegen dessen Abmessungen großen Betrag r und die Richtungskosinus α, β, γ hat:

$$\sum_n \frac{e^{-ikr(r_n - \phi_n)}}{r_n} = \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \sum_n e^{ik(x_n \cdot \alpha + y_n \cdot \beta + z_n \cdot \gamma) - i\phi_n}.$$

Diese Summe ist im allgemeinen eine Funktion von α und β . Sind aber alle x_n, y_n, z_n klein gegen λ , so wird sie konstant.

Nenner den Betrag R des Radiumvektors vom Nullpunkt des Achsenkreuzes zum Aufpunkt und geben der Richtungsfunktion Ψ den Wert, welcher dessen Richtung (α, β, γ) entspricht. Für das r im Exponenten setzen wir aber den Näherungswert:

$$r = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Unter Berücksichtigung von (1) geht somit die Summe (3) über in:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0) + z(\gamma - \gamma_0)]} \\ & = \Psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_m \sum_n \sum_p e^{i(mA + nB + pC)}, \end{aligned} \right.$$

wo zur Abkürzung

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= k[a_{1x}(\alpha - \alpha_0) + a_{1y}(\beta - \beta_0) + a_{1z}(\gamma - \gamma_0)] \\ B &= k[a_{2x}(\alpha - \alpha_0) + a_{2y}(\beta - \beta_0) + a_{2z}(\gamma - \gamma_0)] \\ C &= k[a_{3x}(\alpha - \alpha_0) + a_{3y}(\beta - \beta_0) + a_{3z}(\gamma - \gamma_0)] \end{aligned} \right.$$

gesetzt ist. Denken wir uns den durchstrahlten Teil von Ebenen begrenzt, welche zu den Seiten eines Elementarparallelepipedes parallel sind, so ist die Summation nach m von einer Zahl $-M$ bis zu $+M$, nach n von $-N$ bis $+N$, nach p von $-P$ bis $+P$ auszuführen. Die Lage der Intensitätsmaxima ist von derartigen Annahmen nicht abhängig.¹⁾ Die Intensität der Schwingung (4) wird dann:

$$(6) \quad \frac{|\Psi(\alpha, \beta)|^2 \sin^2 MA \sin^2 MB \sin^2 PC}{R^2 \sin^2 \frac{1}{2} A \sin^2 \frac{1}{2} B \sin^2 \frac{1}{2} C}.$$

Jeder dieser Sinusquotienten erreicht sein Maximum bekanntlich, wenn sein Nenner verschwindet. Die Bedingungen für die Maxima lauten also:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & A = 2h_1\pi \\ & \text{d. h. } a_{1x}\alpha + a_{1y}\beta + a_{1z}\gamma = h_1\lambda + a_{1x}\alpha_0 + a_{1y}\beta_0 + a_{1z}\gamma_0 \\ & \quad B = 2h_2\pi \\ & \text{d. h. } a_{2x}\alpha + a_{2y}\beta + a_{2z}\gamma = h_2\lambda + a_{2x}\alpha_0 + a_{2y}\beta_0 + a_{2z}\gamma_0 \\ & \quad C = 2h_3\pi \\ & \text{d. h. } a_{3x}\alpha + a_{3y}\beta + a_{3z}\gamma = h_3\lambda + a_{3x}\alpha_0 + a_{3y}\beta_0 + a_{3z}\gamma_0. \end{aligned} \right.$$

1) Damit stimmt die Beobachtung überein. Vgl. p. 985.

Die links stehenden Summen sind gleich der Länge je einer Kante multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihr und der Richtung α , β , γ . Jede der Gleichungen (7) stellt somit eine Schar von Kreiskegeln dar, deren Achse mit der Richtung der Kanten a_1 , a_2 , a_3 zusammenfällt.¹⁾ Nun wird es freilich nur in Ausnahmefällen vorkommen, daß eine Richtung allen drei Bedingungen gleichzeitig genügt. Darin liegt die Komplikation gegenüber dem einfachen oder dem Kreuzgitter. Dennoch ist ein sichtbares Intensitätsmaximum zu erwarten, wenn die Schnittlinie zweier Kegel der ersten beiden Scharen einem Kegel, der dritten Schar nahe liegt. Wir wollen diese Verhältnisse etwas näher betrachten für den in Fig. 5 Taf. II abgebildeten Fall, in welchem ein regulärer Kristall in Richtung einer der Kanten a_1 , a_2 , a_3 durchstrahlt wird.

In diesem Falle erhalten die drei Kanten die gleiche Länge α und stehen senkrecht aufeinander, so daß wir in ihre Richtungen die Koordinatenachsen legen können. Da dann

$$a_{1y} = a_{1z} = a_{2x} = a_{2z} = a_{3x} = a_{3y} = 0, \quad a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} = \alpha$$

ferner

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 1$$

wird, so gehen die Gleichungen (7) über in

$$(8) \quad \alpha = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Auf einer zum einfallenden Strahl senkrechten photographischen Platte sind die Kurven $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$. Hyperbeln, deren Mittelpunkt im Durchstoßpunkt des primären Strahles liegt und deren Achsen aufeinander senkrecht stehen. Wären nur die beiden ersten Bedingungen in (8) zu erfüllen, so sähe man das bekannte Kreuzgitterspektrum, bei dem an jedem Schnittpunkte zweier Hyperbeln ein Intensitätsmaximum liegt. So aber wählen die Kreise $\gamma = \text{const}$, deren Mittelpunkt ebenfalls im Durchstoßpunkt des primären Strahles liegt, aus diesen Kreuzgitterspektren diejenigen aus, welche einem von ihnen hinreichend nahe liegen, d. h. man wird auf der

1) Man macht sich wie in der Gittertheorie leicht an der elementaren geometrischen Konstruktion des Gangunterschiedes zwischen zwei parallelen, von benachbarten Teilchen ausgehenden Strahlen klar, daß dieser Gangunterschied auf den genannten Kegeln konstant ist.

Platte diese Kreise nicht ganz, sondern nur in einzelnen Punkten vertreten sehen. Dies ist aber in der Tat der Eindruck, welchen die Figur macht. Die Kreise

$$1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a},$$

welche die Periodizität in der Strahlrichtung ihre Entstehung verdanken, haben in der Optik ein schon seit Newton bekanntes Analogon in den sogenannten Queteletschen Ringen;¹⁾ diese treten bei Bestäubung einer ebenen, auf der Rückseite stark reflektierenden Glasplatte im Fraunhoferschen Beugungsbild auf. Es interferieren nämlich die von einem und demselben Staubteilchen aus dem einfallenden und aus dem bespiegelten Licht abgebeugten Wellen miteinander. Bei senkrechter Inzidenz liegen die Maxima auf den durch Gleichung (9) angegebenen Kreisen, sind aber viel flacher als in unserem Falle, weil nur zwei Wellen interferieren. Ließen sich die Staubteilchen zum regelmäßigen Kreuzgitter anordnen, so ließe sich die Analogie zu den obigen Interferenzen an Kristallen zweifellos noch weiter treiben.

Es muß beachtet werden, daß bei gegebenem Raumgitter die Einteilung in Elementarparallelepipede keine eindeutige ist, sondern auf unendlich viele Arten vorgenommen werden kann. Beim regulären Raumgitter z. B. kann man statt in Würfel in solchen Parallelepipede zerlegen, deren eine Seite die Diagonale einer Würfelfläche ist und somit die Richtung einer zweizähligen Symmetrieachse hat. Die Intensitätsmaxima müssen sich nach den obigen auch zu durchbrochenen Kegelschnitten um solche Achsen zusammenfassen lassen, wie überhaupt zu jederartigen Einteilung eine Art, die Maxima zusammenzufassen, gehört. In der Tat bestätigt die Fig. 12, Taf. IV, daß die Flecken sich zu Kreisen um eine zweizählige Achse anordnen, wenn man in Richtung dieser den regulären Kristall durchstrahlt und die photographische Platte dazu senkrecht stellt. Auch in den komplizierteren Figuren hat man stets den Eindruck, daß sich die Intensitätsmaxima zu durchbrochenen Kegelschnitten verbinden lassen. So viel bisher

1) Vgl. z. B. A. Winkelmann, Handbuch der Physik. Leipzig 1906. p. 1083.

zu sehen ist, läßt sich die Theorie unter der Annahme mehrerer Wellenlängen von $0,038 \cdot a$ bis $0,015 \cdot a$ gut der vierzählig symmetrischen Aufnahme (Fig. 5, Taf. II) anpassen. Da a für Zinksulfid gleich $3,38 \cdot 10^{-8}$ cm ist, würden sich daraus die Wellenlängen in dem Intervall von $1,3 \cdot 10^{-9}$ bis $5,2 \cdot 10^{-9}$ cm ergeben.¹⁾

Trotz dieser Übereinstimmung darf nicht verschwiegen werden, daß unsere Theorie auf jeden Fall weitgehender Verbesserung bedarf. Die Wärmebewegung bei den Molekülen verrückt diese nämlich schon bei Zimmertemperatur um einen erheblichen Bruchteil der Gitterkonstanten und infolgedessen um ein vielfaches der Wellenlänge, ein Umstand, der durchaus der Berücksichtigung bedarf. Deshalb wäre es auch vorzuziehen, wenn man aus dem Ausdruck (6) Schlüsse auf die Schärfe der Interferenzmaxima schließen wollte.

Daß von allen bisher untersuchten Kristallen mit Ausnahme des Diamants die Intensitätsmaxima auf einen spitzen Winkel gegen die Richtung des primären Strahles beschränkt sind, statt nach allen Richtungen auszugehen, wie man zunächst nach Gleichung (6) erwarten könnte, wird man wohl auf die Richtungsfunktion Ψ zurückführen müssen; doch ist es auch denkbar, daß die Wärmebewegung zur Erklärung herangezogen werden muß.

Allgemeine Folgerungen.

Diskutieren wir zum Schluß noch ohne allen Bezug auf die Formel die Frage, inwiefern diese Versuche für die Wellennatur der Röntgenstrahlen sprechen. Daß die vom Kristall ausgehende Strahlung Wellencharakter trägt, ist wohl durch die Schärfe der Intensitätsmaxima bewiesen, welche als Interferenzphänomen leicht auf Grund korpuskularer Vorstellungen aber wohl kaum verständlich ist; daneben auch durch ihre große Durchdringungsfähigkeit, welche von allen bekannten Korpuskularstrahlen nur die schnellsten β -Strahlen erreichen. Dennoch könnte man aber vielleicht die Wellennatur der primären bezweifeln. Denken wir nun einmal, die Atome der Kristalle würden im Fall von Fig. 5, Taf. III, durch eine Korpuskularstrahlung angeregt. (Die von manchen Forschern angenommene Lichtquantenstruktur der Röntgenstrahlen kann hier unter der Bezeichnung korpuskulare

1) Vgl. Zusatz 3 zur folgenden Arbeit von M. Laue.

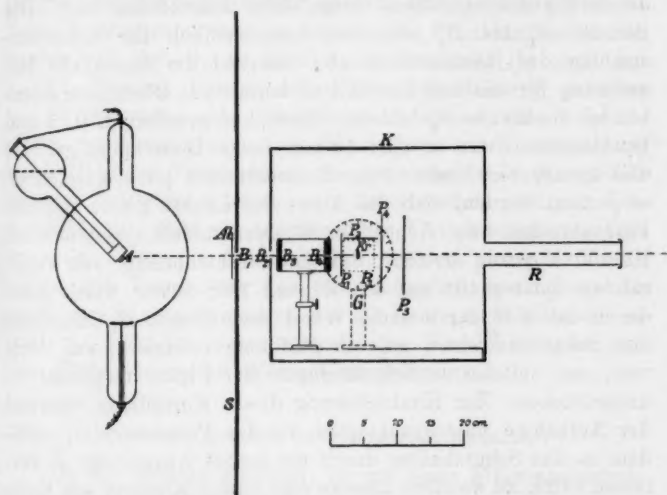
Strahlung mit einbegriffen werden.) Zu kohärenten Schwingungen könnten dabei nur solche Reihen von Atomen kommen, welche von demselben Korpuskel getroffen werden, d. h. Reihen, welche zur z -Richtung parallel sind. Atome, welche in der x - oder y -Richtung einen gewissen Abstand voneinander haben, würden von verschiedenen Korpuskeln angeregt; eine bestimmte Phasendifferenz zwischen ihren Schwingungen könnte nicht auftreten. Infolgedessen würde von dem Intensitätsausdruck (6) nur ein Sinusquotient übrig bleiben; wir erhielten nur eine Bedingung für ein Intensitätsmaximum und diese wäre, wie schon aus Symmetriegründen einleuchtet, auf Kreisen um den Durchstoßpunkt des primären Strahls erfüllt. Die Durchbrechung dieser Kreise, die doch tatsächlich auftritt, wäre danach unverständlich. Zudem sind aber die primären und die vom Kristall ausgehenden Strahlen allem Anschein nach so gleichartig, daß man von der Wellennatur der letzteren wohl ziemlich sicher auf die Wellennatur der ersteren schließen kann. Ein Unterschied bleibt freilich bestehen: die vom Kristall ausgehende Strahlung hat sicher eine erhebliche spektrale Homogenität, d. h. eine gewisse Periodizität. Die primäre Strahlung hingegen wird man nach Sommerfeld wohl soweit sie „Bremsstrahlung“ ist, als aus durchaus unperiodischen Impulswellen bestehend annehmen müssen; die im folgenden mitgeteilten Versuche sind jedenfalls mit dieser Annahme verträglich. Unentschieden bleibe vorläufig, ob die periodische Strahlung erst im Kristall durch Fluoreszenz entsteht, oder ob sie neben den Impulsen schon in der primären Strahlung vorhanden ist und durch den Kristall nur ausgesondert wird.¹⁾ Doch scheint Hoffnung zu bestehen, daß weitere Versuche bald darüber Aufschluß geben werden.

Experimenteller Teil von W. Friedrich und P. Knipping.

Zur experimentellen Prüfung der im vorhergehenden Teile beschriebenen Vermutung wurde nach einigen Vorversuchen mit einem provisorischen Apparat folgende definitive Versuchsanordnung verwandt, die in Fig. 1 schematisch abgebildet ist.

1) Vgl. p. 988.

Von den von der Antikathode A einer Röntgenröhre ausgehenden Röntgenstrahlen wird ein schmales Bündel von ca. 1 mm Durchmesser durch die Blenden B_1 bis B_4 ausgeblendet. Dieses Bündel durchsetzt den Kristall Kr , der in einem Goniometer G aufgestellt ist. Um den Kristall sind in verschiedenen Richtungen und Abständen photographische Platten P angebracht,



Abstand	Antikathode-Kristall	350 mm
„	Kristall- P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 . . .	25 „
„	Kristall- P_4	35 „
„	Kristall- P_5	70 „

Fig. 1.

auf denen sich die Intensitätsverteilung der vom Kristall ausgehenden Sekundärstrahlen registriert. Gegen nicht gewollte Strahlen ist die Anordnung durch einen großen Bleischirm S sowie durch den Bleikasten K in genügender Weise geschützt. Die Größe der wichtigen Teile der Versuchsanordnung lassen sich aus der Fig. 1 entnehmen, die im Maßstab 1:10 gezeichnet ist.

Die Einstellung der gesamten Versuchsanordnung wurde auf optischem Wege bewerkstelligt. Ein Kathetometer, dessen Fernrohr mit einem Fadenkreuz versehen war, hatten wir ein

für allemal unverrückbar aufgestellt. Der Reihe nach wurden Brennfleck und Antikathode, Blenden und Goniometerachse in die optische Achse des Fernrohrs gebracht. Auf diese Weise konnten wir die recht umständliche Einstellung mit Röntgenstrahlen durch die viel bequemere optische ersetzen. Kontrollversuche mit Röntgenstrahlen selbst erwiesen auch, daß diese Justierung auf optischem Wege völlig ausreichend war. Die Blenden B_1 bis B_3 schirmten hauptsächlich die Sekundärstrahlen der Röhrenwände ab, während die eigentliche Begrenzung für das auf den Kristall auffallende Röntgenstrahlenbündel die Blende B_4 bildete. Diese hat gewöhnlich 0,75 mm Durchmesser, war in eine 10 mm dicke Bleischeibe gebohrt und konnte vermittelt dreier Stellschrauben (nicht gezeichnet) so justiert werden, daß die Achse des Loches genau mit der Fernrohrachse bzw. Achse des Strahlenbündels zusammenfiel. Hierdurch wurde erreicht, daß ein Strahlenbündel von kreisrundem Querschnitt auf den Kristall fiel; ferner wurde hierdurch daß Maß der von der Wand jener Blende B_4 ausgehenden Sekundärstrahlen auf ein Minimum reduziert, was nötig war, um unliebsame Schwärzungen der Platte möglichst zu unterdrücken. Zur Kontrollierung dieser Einstellung während der Aufnahme photographierten wir das Primärbündel, nachdem es den Schutzkasten durch ein langes Ansatzrohr R verlassen hatte, zu welchem Zwecke eine eigene Kassette am Ende dieses Rohres angebracht war (nicht mitgezeichnet). Das Rohr R diente sonst dazu, die Sekundärstrahlen, die bei dem Auftreffen der Primärstrahlen auf die hintere Kastenwand entstehen würden, möglichst zu vermeiden.

Nach diesen Justierungen, deren Güte wir vor jeder Aufnahme kontrollierten, wurde die Goniometerachse auf dem üblichen Wege senkrecht zum Strahlengang gerichtet. In gleicher Weise waren die verschiedenen Plattenhalter so justiert, daß die Primärstrahlen die aufgestellten Films bzw. Platten senkrecht durchsetzten bzw. parallel zu ihnen verliefen. Wenn der Apparat soweit orientiert war, wurde der zu bestrahlende Kristall, der mit einer Spur Klebwachs am Goniometertisch befestigt war, eingestellt und zwar wieder mit Hilfe des schon genannten Fernrohrs in der bekannten Weise unter Benutzung eines „Signales“. Diese — wie sich später zeigen wird —

sehr wesentliche Justierung konnte von uns bis auf eine Minute genau vorgenommen werden. Als Aufnahmematerial benutzten wir, nachdem wir einige andere Sorten als nicht so geeignet befunden hatten, Schleußner-Röntgenfilms, die mit Rodinal (1:15) entwickelt die besten Resultate lieferten.

Die Überschlagsrechnungen nach den bisherigen Erfahrungen über Sekundärstrahlen zeigten, daß recht beträchtliche Expositionszeiten notwendig waren. Die Belichtungszeiten bewegten sich bei 2—10 Milliampère Belastung (je nach der 6—12 Wehnelt betragenden Härte der Röhre)¹⁾ zwischen 1—20 Stunden. Als Röntgenröhren kamen teils Intensivröhren von Gundelach, teils Rapidröhren mit Wasserkühlung von Müller zur Verwendung, die von einem 50 cm Klingelfußinduktor betrieben wurden. Als Unterbrecher gelangten teils ein Wehnelt-, teils ein mechanischer Unterbrecher zur Verwendung. Vor die Röntgenröhre wurden passende Ventilröhren zur Vermeidung von Schließungslicht geschaltet. Es wurde mit Pausen exponiert, um die Röhre nicht allzusehr zu erhitzen. Für die bisher ausgeführten Versuche erwies sich eine Härte von 8—10 Wehnelt als geeignet.

Versuche mit dem provisorischen Apparat.²⁾

Da wir anfangs glaubten, es mit einer Fluoreszenzstrahlung zu tun zu haben, mußte ein Kristall verwendet werden, der Metall von beträchtlichem Atomgewicht als Bestandteil enthielt, um möglichst intensive und zugleich homogene Sekundärstrahlen zu erhalten, die für die Versuche am geeignetsten zu sein schienen. Nach Barkla kamen in erster Linie die Metalle vom Atomgewicht 50—100 in Betracht. Da wir vorderhand keinen guten Kristall, der derartige Metalle enthielt, zur Verfügung hatten, benutzten wir zu den Vorversuchen einen leidlich ausgebildeten Kupfervitriolkristall. Dieser wurde ziemlich willkürlich in den Apparat eingesetzt, und zwar fielen die

1) Zwei Härtemesser waren uns in dankenswerter Weise von der Firma Reiniger, Gebbert & Schall zur Verfügung gestellt.

2) Dieser war im Prinzip wie der in Fig. 1 dargestellte, nur einfacher gehalten und ohne genaue Einstellungsmöglichkeit. Die Blendöffnungen betrugen hierbei 3 mm.

Röntgenstrahlen ungefähr senkrecht auf eine Pinakoidfläche 3. Art (110) auf. Im Abstand von 40 mm von ihm waren zwei photographische Platten — entsprechend P_2 und P_4 in Fig. 1 — aufgestellt. Nach der Exposition war die obere Platte schwach, oder gleichmäßig geschwärzt, P_4 wies außer dem Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen eine Reihe von anscheinend geordneten Flecken auf (vgl. Taf. I, Fig. 1).

Um sicher zu sein, daß diese Flecken durch die Kristallstruktur des Kupfervitriols bedingt waren, wurden Kupfervitriolkristalle grob pulverisiert, in ein kleines Papierschächtelchen eingeschlossen und der vorhergehende Versuch bei sonst gleichen Bedingungen wiederholt. Die Platte P_2 zeigt keine Änderung, dagegen waren die großen geordneten Flecken auf P_4 verschwunden; statt dessen erschien der Durchstoßungsfleck mit einem Saum von vielen kleinen, unregelmäßig geordneten Pünktchen umgeben (vgl. Taf. I, Fig. 2). Die Vermutung, daß bei ganz fein pulverisiertem Material der Rest der Flecken verschwinden würde, fand seine Bestätigung durch den nächsten Versuch. Ein weiterer Versuch mit herausgenommenem Kristall bei sonst identischen Bedingungen zeigte, wie wohl zu erwarten war, daß die Platten bis auf den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen ungeschwärzt blieben.

Es folgten noch zwei Aufnahmen mit dem zuerst genannten Kupfervitriolkristall. Bei der einen wurde bei gleicher Orientierung der Kristall parallel zu sich verschoben, so daß eine andere Stelle des Kristalles durchstrahlt wurde; bei der zweiten der Kristall um einige Grade gegen die Röhre geneigt. Jene Aufnahme ist identisch mit Fig. 1, Taf. I, die Erscheinung ist unabhängig vom Ort der Durchstrahlung. Die andere Aufnahme zeigt, daß die Lage der sekundären Flecken von der Orientierung des Kristalles gegen die Einfallsrichtung der Primärstrahlen abhängig ist.

Da die eben beschriebenen Versuche erwiesen hatten, daß sich die Vermutung Laues glänzend bestätigte, ließen wir den vorhin beschriebenen besseren Apparat bauen, stellten aber inzwischen weitere Versuche mit Zinkblende, Steinsalz und Bleiglanz (Spaltstücke) an. Diese ergaben ganz ähnliche Resultate wie bei Kupfervitriol. Wir werden jedoch von einer Beschreibung derselben Abstand nehmen, weil, wie sich zeigen

wird, eine genaue Orientierung der Kristalle notwendig war, um einen tieferen Einblick in die Erscheinungen zu gewinnen.

Versuche mit genauer Orientierung des Kristalles zur Richtung der Primärstrahlen.

Mit dem definitiven Apparat wurde zunächst die auf Fig. 1, Taf. I abgebildete Aufnahme wiederholt, und zwar wurden sämtliche in Fig. 1 angegebenen Platten aufgestellt.¹⁾ Die Orientierung des Kupfervitrioles war möglichst dieselbe wie vorher. P_2 und P_3 zeigten gleichmäßige Schwärzung; P_1 wies bloß den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen auf. Auf P_4 und P_5 war eine ähnliche Figur wie bei Aufnahme 1 zu sehen; indessen waren jetzt entsprechend der kleinen Blendenöffnung die sekundären Flecken zusammengeschrumpft (vgl. Taf. I, Fig. 3 und 4). Bemerkenswert ist, daß sich die Abstände (Kristall — P_4) zu (Kristall — P_5) verhalten wie die Größe der Figuren auf P_4 bzw. P_5 , wodurch erwiesen wurde, daß die Strahlung gradlinig vom Kristall ausgeht. Ferner ist zu beachten, daß die Größe der einzelnen Interferenzflecke trotz des größeren Abstandes der Platte P_5 vom Kristall dieselbe geblieben ist. Dies dürfte wohl ein Anzeichen dafür sein, daß die je einen Einzelfleck hervorrufenden Strahlen als paralleles Bündel aus dem Kristall heraustreten.

Es ist zu erwarten, daß die Erscheinung bei Kristallen des regulären Systems übersichtlicher und leichter verständlich wird wie bei dem triklinen Kupfervitriol, weil man wohl annehmen darf, daß das zugehörige Raumgitter von der größtmöglichen Einfachheit ist. Als geeignet erschien uns die reguläre Zinkblende, mit der wir, wie schon erwähnt, Vorversuche gemacht und beträchtliche Intensität der Sekundärstrahlen erhalten hatten. Wir ließen von Steeg & Reuter in Homburg eine planparallele Platte aus einem guten Kristall parallel zu einer Würfelfläche (100) (senkrecht zu einer kristallographischen Hauptachse) schleifen von 10×10 mm Größe und 0,5 mm Dicke. Diese Platte wurde in der oben beschriebenen Weise genau orientiert, so daß die Primärstrahlen den Kristall senkrecht zur Würfelfläche durchsetzten. Das Resultat eines solchen Versuches zeigt uns Fig. 5, Taf. II. Die Lage

1) Blendenöffnung B_1 bei diesem Versuch 1,5 mm.

der Flecke ist völlig symmetrisch geworden in bezug auf den Durchstoßungspunkt. Man kann in die Figur zwei Paare zueinander senkrecht stehende Symmetrieebenen einzeichnen. Nimmt man irgend einen der Flecken aus der Figur heraus und liegt dieser nicht auf einer der Symmetrieebenen, so kann man ihn durch Spiegelung und Drehung um 90° mit noch sieben zugehörigen Punkten zur Deckung bringen. Fällt ein Fleck mit einer Symmetrieebene zusammen, so kann man diesen naturgemäß nur mit noch drei entsprechenden zur Deckung bringen. Dies entspricht der holodrischen Symmetrie des regulären Systems, trotzdem die Zinkblende in eine hemiedrische Klasse gehört. Diese Tatsache, daß eine völlige Vierzähligkeit auf der Platte vorhanden ist, ist wohl einer der schönsten Beweise für den gitterartigen Aufbau der Kristalle, und ein Beweis dafür, daß keine andere Eigenschaft als allein das Raumgitter hier in Betracht kommt. Denn die einfachen Raumgitter zeigen *stets* eine höhere Symmetrie als der Kristall, für dessen Darstellung sie ein Element bilden; Translationen von Raumgittern verschiedener Natur gegeneinander, wie sie zur Erklärung der Hemiedrien angenommen werden müssen, sind nach den Versuchen¹⁾ und unserer Theorie ohne Einfluß.

Die Anforderung der Symmetrie fand auch weiterhin ausnahmslos Bestätigung durch die Versuche. Einmal ließen wir die Primärstrahlen senkrecht auf eine Oktaederfläche (111), dann auf eine Rhombendodekaederfläche (110) auffallen. Fig. 7, Taf. II, gibt eine Dreizähligkeit wieder entsprechend der dreizähligen Achse, in der der Kristall bestrahlt wurde; Fig. 12, Taf. IV analog Zweizähligkeit, entsprechend der zweizähligen Achse.²⁾

1) Neuere Versuche an Pyrit und Hauerit haben dies nicht bestätigt. Die betreffenden Aufnahmen (nach der vierzähligen Achse) zeigen vielmehr hemiedrische Symmetrie. W. Friedrich.

2) Die Verwaschenheit bzw. Unterteiltheit der Flecken hat ihre Ursache in der Mangelhaftigkeit des untersuchten Kristallstückes. Die Spaltflächen bestanden deutlich aus Flächenstücken, die um kleine Winkel gegeneinander geneigt waren. Das reflektierte Bild eines Gegenstandes war sehr verzerrt. Ob diese Unregelmäßigkeiten schon in dem Kristall, aus dem das untersuchte Stück herausgespalten war, enthalten waren, oder erst das regelmäßige Gefüge durch den Stoß des Spaltens zerstört wurde, wollen wir dahingestellt sein lassen. Jedenfalls tritt die Unterteilung der Einzelflecken fast stets bei Spaltstücken auf, selten an solchen Präparaten, die aus einem großen Kristall herausgesägt oder geschnitten sind.

Drehen wir den Kristall um den primären Strahl, so muß man aus dem Vorhergehenden schließen, daß sich das Bild auf der Platte mitdreht. In der Tat bestätigen dies die Versuche.

Es war noch zu zeigen, eine wie genaue Orientierung des Kristalles erforderlich ist, um bei Wiederholung eines Versuches identische Bilder zu erhalten. Wir ließen den primären Strahl um 3° gegen eine vierzählige Achse geneigt, doch so, daß die Ebene durch Strahl und Achse eine Symmetrieebene war, durch den Kristall gehen. Das Resultat dieses Versuches gibt Fig. 11, Taf. IV. Wie wir sehen, ist die Vierzähligkeit verschwunden, wenngleich man noch die Mehrzahl der Flecken in Fig. 5, Taf. II, wiedererkennen kann. Die eine Symmetrieebene zeigt sich auch hier. Ebenso ist Fig. 8, Taf. III, durch Neigung des Kristalles um 3° aus Fig. 7, Taf. III, entstanden.

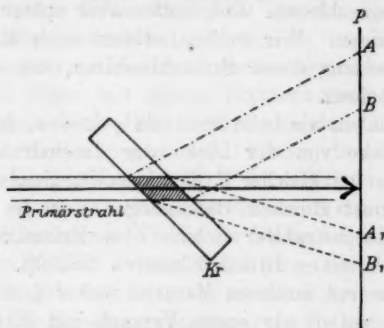


Fig. 2.

Drehen wir die senkrecht zur vierzähligen Achse geschliffene Platte so, daß der primäre Strahl sie parallel zu einer dreizähligen Achse durchsetzte, so ergab sich eine Figur die sich von Fig. 7, Taf. III, nicht in der Lage der Flecke, sondern allein durch deren Größe unterschied. Auch nach der Symmetrie gleichberechtigte Flecken zeigen jetzt Größenunterschiede. Es beweist dies, daß die Begrenzung des durchstrahlten Kristallstückes ohne Einfluß auf die Lage der Intensitätsmaxima ist, während die Unterschiede in der Fleckengröße den Unterschieden der verschieden gerichteten Projektionen des durchsetzten Metallstückes auf die photographische Platte entsprechen (vgl. Fig. 2). Das schraffierte Gebiet stellt den

durchleuchteten Teil des Kristalles Kr dar. AB und A_1B_1 sind die Projektionen dieses Teiles auf die Platte P und gehen die Größe der Flecken an. Drehten wir dieselbe Kristallplatte so, daß der primäre Strahl sie jetzt in der Richtung einer zweizähligen Symmetrieachse durchsetzte, so entstand eine Figur, die sich nur durch die ungleiche Größe entsprechender Flecke von der Aufnahme Fig. 12, Taf. IV unterschied, die wir mit einem zur zweizähligen Achse senkrechten Spaltstück gemacht hatten.

Außer den eben beschriebenen Versuchen haben wir weitere mit Zinkblende, Kupferkristall, Steinsalz und einer Diamantplatte angestellt. (Die Diamantplatte ist ein höchst dankenswertes Geschenk der Firma Ginsberg in Hanau an das physikalische Institut der Universität.) Wir sehen jedoch von der Mitteilung der Photogramme ab, weil die Versuche noch nicht abgeschlossen sind, hoffen aber später darüber berichten zu können. Wir wollen indessen noch auf zwei Versuchsergebnisse aus dieser Serie hinweisen, die uns von Bedeutung erscheinen.

Erstens haben wir beim Steinsalz gefunden, daß die Intensität der Flecke von der Dicke der durchstrahlten Schicht abhängt; denn bei gleicher Expositionszeit, gleicher Härte der Röhre und sonst gleichen Bedingungen war die Schwärzung bei 15 mm durchstrahlter Schicht des Kristalles wesentlich größer als bei einer 10mal dünneren Schicht. Wir wollen diese Versuche mit anderem Material weiter fortführen.

Zweitens wollen wir einem Versuch mit dem Diamanten ein paar Zeilen widmen. Kohlenstoff zeigt nach Barkla keinerlei bisher nachgewiesene Eigenstrahlung. Es war also zu erwarten, daß selbst bei erheblichen Expositionen die Platten außer der durch die zerstreute Strahlung hervorgerufenen allgemeinen Schwärzung keine Flecken wie bei den anderen Kristallen zeigten, wenn diese auf Eigenstrahlung des Kristalles beruhten. Entgegen dieser Vermutung wissen nicht nur die hinteren Platten P_4 und P_5 ähnliche Erscheinungen wie bei den früheren Aufnahmen auf, sondern sogar die Platten P_1 , P_2 und P_3 ließen deutliche Flecken erkennen.¹⁾ Ob diese auf-

1) Auch bei tagelanger Exposition haben wir bei anderen Kristallen niemals auf den Platten P_1 , P_2 und P_3 etwas anderes als allgemeine Schwärzung erhalten.

fallende Tatsache zusammenhängt mit dem kleinen Atomvolumen im Vergleich zu dem der übrigen Kristalle oder mit dem anomalen Verhalten des Diamanten gegenüber den Wärmeschwingungen, welches sich an der spezifischen Wärme zeigt, wollen wir vorläufig dahingestellt sein lassen.¹⁾

Neben diesen bis jetzt beschriebenen Untersuchungen, die den Zusammenhang der Lage der Sekundärflecken und der Gitterstruktur erforschen sollen, haben wir den Charakter der die Flecken hervorbringenden Strahlen untersucht. Daß wir es in der Tat mit Röntgenstrahlen zu tun haben, zeigt der Umstand, daß die Strahlen durch beträchtliche Schichten von Metallen hindurchgehen, z. B. durch die Plattenhalter aus Stahlblech. Vorläufige Härtemessungen wurden mit dem Zinkblendekristall, der senkrecht zur vierzähligen Achse geschliffen war, auf folgende Weise angestellt. Da wir das Schwärzungsgesetz der Röntgenstrahlen nicht kennen, ist die Intensität der Strahlen proportional der durch sie hervorgerufenen Schwärzung gesetzt und diese mit einem Hartmannschen Mikrophotometer ausgemessen. Die Kristallsymmetrie bedingt, daß je acht einem Kreise zugeordnete Flecke dieselbe Schwärzung haben, was in der Tat der Fall ist. Wir brachten nun vor der Platte P_2 ein Aluminiumblech von 3 mm Dicke, welches zwei gegenüberliegende Viertel der Platte bedeckte, die anderen beiden freiließ. Das Primärbündel ging, um Sekundärstrahlen des Aluminiumblechs zu vermeiden, durch eine zentrale Öffnung hindurch. Die Schwärzungsmessungen, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind, zeigen, daß der Absorptionskoeffizient der Strahlen ungefähr $3,84 \text{ cm}^{-1}$ für Aluminium ist. In Kolonne 1 stehen die Durchmesser d der Kreise, auf dem die zueinander gehörenden Flecken liegen. In der zweiten die Schwärzung der Flecken ohne Aluminiumblech, während in der dritten Kolonne die Schwärzung nach dem Durchgang der Strahlen durch das Aluminiumblech verzeichnet ist. In der vorletzten Spalte sind die Werte der Schleierschwärzung der Platten eingetragen, während in die letzte die nach dem bekannten Absorptionsgesetz berechneten Absorptionskoeffizienten k für Al stehen. Das Absorptionsgesetz ist als ex-

1) Vgl. theor. Teil.

ponentiell angenommen. Barkla findet für die Durchdringungsfähigkeit der Eigenstrahlung des Zinks einen wesentlich kleineren (für k also einen wesentlich größeren) Wert. Eine nach derselben Methode ausgeführte Härtemessung beim Diamanten ergab eine Härte von ungefähr derselben Größe. Die Härtemessungen nach der photographischen Methode sind jedoch nicht genau genug, um sichere Schlüsse hierüber ziehen zu lassen, da der gefundene Härteunterschied außerhalb der Meßgenauigkeit liegt. Mit einer elektrischen Methode, die wohl von den Zufälligkeiten der photographischen Methode, besonders den Plattenfehlern, verschieden harte Entwicklung usw. frei ist, werden diese Versuche wieder aufgenommen und es wird dann darüber berichtet werden.

d	ohne Al	mit Al	Schleier	k
50 mm	1,78	0,88	0,45	3,53 cm ⁻¹
57,5 "	2,02	0,79	0,45	4,71 "
74 "	0,69	0,53	0,45	3,28 "
86 "	0,84	0,55	0,45	3,89 "

Für die Beurteilung der Frage nach dem Ursprung der Strahlen ist die folgende Tatsache von Wichtigkeit: Während der Expositionszeit schwankte die Härte der Primärstrahlen besonders bei älteren Röhren, die ziemlich aufgebraucht waren und daher oft regeneriert werden mußten, in beträchtlicher Weise (von 6—12 Wehnelt). Dennoch blieben, wie die Photographie zeigten, die sekundären Flecken scharf begrenzt und unverrückt.

Zum Schluß wollen wir besonders Hrn. Prof. A. Sommerfeld, in dessen Institut diese Arbeit ausgeführt ist, für die bereitwillige Beschaffung der Apparate, sowie sein stetiges Interesse und seine fördernden Ratschläge unseren herzlichsten Dank aussprechen. Wir möchten bei dieser Gelegenheit auch nicht versäumen, Hrn. Geheimrat Röntgen und Hrn. Geheimrat v. Groth für Überlassung von wertvollen Kristallen und Apparaten, sowie ihr reges Interesse ebenfalls verbindlich zu danken.

München, Inst. für theor. Physik der Universität.

(Eingegangen 15. März 1913.)

**4. Eine quantitative Prüfung der Theorie
für die
Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen;
von M. Laue.¹⁾**

(Hierzu Taf. II, Figg. 5 u. 6.)

Vor kurzem veröffentlichten W. Friedrich, P. Knipping und der Verfasser²⁾ an dieser Stelle Beobachtungen über Interferenzerscheinungen, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle entstehen, sowie eine Theorie dazu, welche sich qualitativ der Erfahrung anschloß. Jetzt soll diese Theorie einer ersten quantitativen Prüfung unterzogen werden. Mag es sein, daß es dabei nicht gelingt, zur vollen Wahrheit durchzudringen, daß besonders die Werte für die Wellenlängen der Röntgenstrahlen später ersetzt werden müssen durch andere, welche zu ihnen in einfachen rationalen Verhältnissen stehen. Das eine geht wohl aus der weitgehenden Übereinstimmung mit der Erfahrung hervor: daß die Theorie auf dem rechten Wege ist. Zugleich mag das Folgende als Beispiel für das Verfahren nützlich sein, nach welchem Photogramme, wie die dort veröffentlichten, auszuwerten sind. Wir wählen dazu die Fig. 5 auf Taf. II, bei welcher das regulär kristallisierte Zinksulfid parallel einer vierzähligen Symmetrieachse durchstrahlt wird. Die Gitterkonstante a ergibt sich aus der Überlegung, daß jedem Elementarwürfel dieses Gitters ein Zink- und ein Schwefelatom entspricht. Bezeichnet also

$$N = 6,20 \cdot 10^{23}$$

die Zahl der Molekeln im Mol³⁾,

$$m = 65,4 + 32 = 97,4$$

1) Wenig veränderter Abdruck aus den Münchner Ber. 1912. p. 363.

2) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Münchener Ber. 1912. p. 308 und die vorhergehende Arbeit. Die dortige Numerierung der Gleichungen und Figuren wird hier fortgesetzt.

3) M. Planck, Wärmestrahlung. Leipzig 1913. p. 166.

das Molekulargewicht und

$$\delta = 4,06$$

die Dichte¹⁾, so muß

$$(10) \quad a^3 N = \frac{m}{\delta}$$

sein, weil beide Seiten der Gleichung das Volumen eines Mols darstellen. Daraus folgt:

$$(11) \quad a = 3,38 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Wie schon erwähnt (p. 975) legt man zweckmäßig die Koordinatenachsen in die Richtungen der Würfelkanten. Die drei Sinusquotienten des Intensitätsausdruckes (6) haben dann nach (8) ihre Maxima auf den Kegelflächen.

$$(12) \quad \alpha = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Die Schnitte der beiden ersteren Scharen mit der senkrecht zur z -Richtung stehenden photographischen Platte sind Hyperbeln, während die Gleichung $\gamma = \text{const}$ konzentrische Kreise um den Durchstoßpunkt des primären Strahles ergibt; die Radien dieser Kreise sind proportional zur Tangente des Achsenwinkels

$$\varphi = \arccos \gamma$$

der zugehörigen Kreiskegel.

Um das Photogramm theoretisch nachzukonstruieren, ersetzt man zweckmäßig die wirklichen Koordinaten

$$x = \alpha \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y = \beta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eines Punktes auf der Platte durch α und β als rechtwinklige Koordinaten. Dann bekommen die Kreise

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \text{const}$$

Radien gleich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sin \varphi.$$

In radialer Richtung ist also die Zeichnung gegen das Photogramm verzerrt. Erhalten dagegen bleiben alle Winkel, deren Spitze im Mittelpunkt liegt und damit die Winkelabstände der zu berechnenden Flecken, weil

$$\alpha : \beta = x : y$$

1) Landolt-Börnstein, Tabellen. Berlin 1894. p. 62.

ist. Vor allem aber werden die Kurven $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ jetzt zu den Koordinatenachsen parallele äquidistante Gerade; benutzt man bei der Zeichnung λ/a als Längeneinheit, so findet man diese auf Koordinatenpapier unmittelbar vor. Jedem Schnittpunkt solcher Geraden entspricht ein Schnittpunkt von zwei Hyperbeln im Photogramm, d. h. ein mögliches Kreuzgitterspektrum. Es fragt sich nun, welche von diesen Punkten einem Kreise

$$1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}$$

naheliegen. Wie nahe sie daran liegen müssen, um wirklich sichtbar zu werden, entzieht sich vorläufig unserer Beurteilung. Wir rechnen im folgenden, als ob sie genau auf ihnen liegen müßten, d. h., als ob die Gleichungen (8) alle genau erfüllt wären. Jedem Interferenzpunkt sind dann drei ganze Zahlen h_1, h_2, h_3 , seine Ordnungszahlen, zugeordnet. Diese für spektral-homogene Strahlen sicherlich nicht zutreffende Annahme hat auf die zu errechnende Lage der Interferenzpunkte keinen merklichen Einfluß. Auffälliger wird ihr Einfluß auf die zu berechnenden Werte der Wellenlänge, insofern sich diese auch dann ein wenig unterscheiden werden, wenn sie sich auf dieselbe Strahlung beziehen. So lassen sich die unten gefundenen, einige Prozente betragenden Differenzen dieser Art erklären. Wie weit dabei die tatsächliche Unbestimmtheit der Wellenlänge infolge der spektralen Inhomogenität eine Rolle spielt, bleibt eine offene Frage.

Haben wir nun für ein Intensitätsmaximum die drei Ordnungszahlen h gefunden, so bestimmt sich das Verhältnis λ/a wegen der Gleichungen (12) und der Identität

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

zu

$$(13) \quad \frac{\lambda}{a} = \frac{2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Die Richtungskosinus α, β, γ , d. h. die Lage eines Interferenzpunktes, bestimmt sich wegen (8) eindeutig aus den Ordnungszahlen h nach den Formeln:

$$(13a) \quad \alpha = \frac{2 h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \beta = \frac{2 h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \gamma = \frac{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Die Koordinaten x, y eines Interferenzpunktes im Photogramm hängen natürlich außerdem noch vom Abstand z der Platte vom Kristall ab; für sie gelten die Formeln:

$$(13b) \quad x = \frac{\alpha}{\gamma} z = \frac{2 h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} \cdot z, \quad y = \frac{\beta}{\gamma} z = \frac{2 h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} \cdot z.$$

Da die Zahlen h ganze Zahlen sind, so sind sie und damit der nach (13) bestimmte Wert λ/α von kleinen Beobachtungsfehlern unabhängig.

In dem genannten Photogramm fassen wir zunächst den zweiten Ring von innen ins Auge, der einen sehr stark ausgeprägten, der Symmetrie wegen achtfachen Punkt trägt. Sein Radius, bestimmt aus dem Abstand einander gegenüberliegender Punkte, ist $r = 1,25$ cm. Da der Abstand der Platte vom Kristall $z = 3,56$ cm¹⁾ betrug, so folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{z} = 0,350, \quad \varphi = 19^\circ 20',$$

$$\cos \varphi = \gamma = 0,9436,$$

$$1 - \gamma = 0,0564.$$

Ist der fragliche Ring von der ersten Größenordnung, so muß nach der dritten der Gleichungen (8)

$$(14) \quad \frac{\lambda}{\alpha} = 0,0564$$

sein. Dann aber müssen wir wegen der Ganzzahligkeit der h nach (13) schließen:

$$\sum h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 36.$$

Auf dem Koordinatenpapier (Fig. 3) findet man nun leicht die Punkte

$$h_1 = 3, \quad h_2 = 5,$$

$$h_1 = 5, \quad h_3 = 3,$$

1) Dieser Abstand z war experimentell nicht so genau bestimmt, wie er hier angegeben ist, schon weil der photographische Film nie ganz eben ist. Der Wert 3,56 cm ist so gewählt, daß die Radien der Ringe in der Berechnung möglichst genau mit dem am Photogramm gemessenen stimmen. Somit enthält die Messung eines einzelnen Radius noch keine Prüfung der Theorie, sondern nur die Messung der Quotienten aus den Radien verschiedener Ringe.

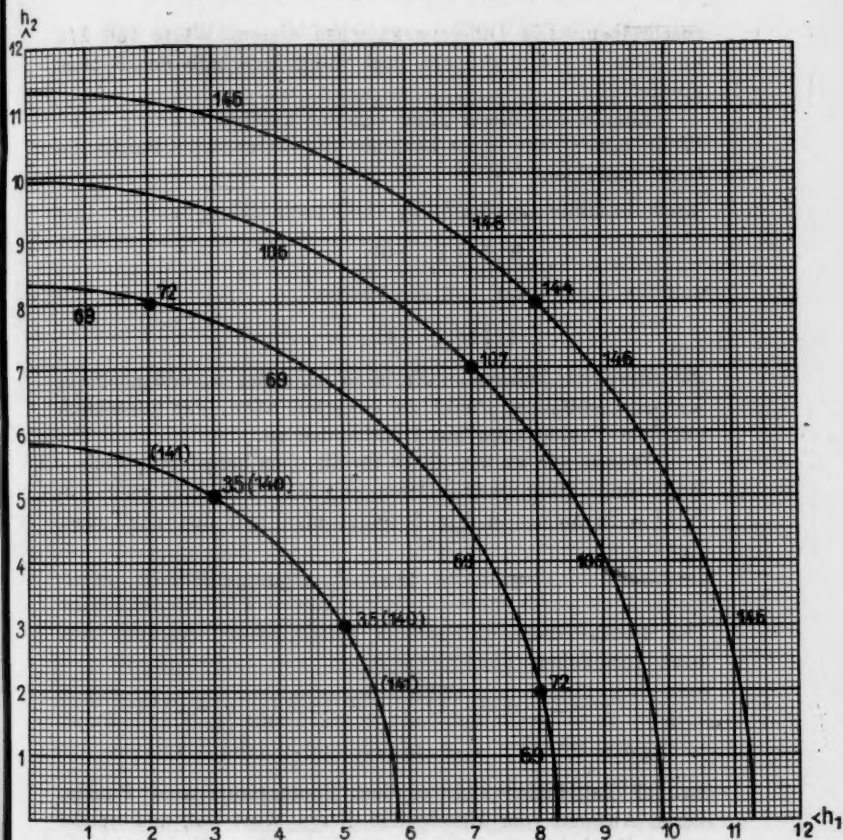


Fig. 3.

für welche, wenn $h_3 = 1$, $\sum h^2 = 35$ ist. Messen wir ihre Winkelabstände gegeneinander und gegen die Achsen, so finden wir völlige Übereinstimmung mit der Lage jener acht Punkte im Photogramm. Somit werden wir dieser Wellenlänge den achtfachen Punkt

$$\begin{array}{c|c|c|c} h_1 & h_2 & h_3 & \sum h^2 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 35 \end{array} \left| \frac{\lambda}{a} \text{ nach (13)} \right.$$

$$\frac{2}{35} = 0,0571$$

zuschreiben. Die Differenz zwischen diesem Werte von λ/a und dem in (14) gegebenen liegt völlig innerhalb der Fehlergrenze.

Könnte nun dieser Ring von der zweiten Ordnung sein? Wohl kaum; denn sonst bekämen die betrachteten Punkte die Ordnungszahlen

$$\begin{array}{c|c|c|c} h_1 & h_2 & h_3 & \sum h^2 \\ \hline 6 & 10 & 2 & 140 \end{array} \left| \frac{\lambda}{a} \text{ nach (13)} \right.$$

und die Figur zeigt, daß die Punkte

$$4 \mid 11 \mid 2 \mid 141 \mid$$

dem durch sie führenden Kreis so nahe liegen, daß noch ein weiterer achtfacher Punkt zu erwarten wäre, der tatsächlich auf dem Photogramm nicht vorhanden ist.

Fragen wir weiter, ob es für die oben berechnete Wellenlänge einen Ring zweiter Ordnung gibt. Dann muß nach (13) $\sum h^2 = 70$ sein. In Fig. 3 findet man nun den achtfachen Punkt.

$$2 \mid 8 \mid 2 \mid 72 \mid \frac{4}{72} = 0,0555.$$

Der Radius dieses Ringes im Photogramm berechnet sich nach dem Schema:

$$1 - \gamma = 2 \frac{\lambda}{a} = 0,1111, \quad \gamma = 0,8889, \quad \varphi = 27^\circ 16',$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,5154, \quad r = z \operatorname{tg} \varphi = 3,56 \cdot 0,5154 = 1,84 \text{ cm.}$$

In der Tat finden sich in dem Photogramm acht Punkte, deren Abstand vom Mittelpunkt diesen Wert hat, und welche gegen die Achsen und gegeneinander dieselben Winkelabstände haben, wie der angegebene Punkt und die sieben anderen, welche man durch Vertauschung von h_1 und h_2 , sowie durch Umkehrung der Vorzeichen dieser Zahlen daraus ableitet. Dagegen fehlen die Punkte

$$\left. \begin{array}{c|c|c} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \end{array} \right\} 69 \mid \frac{4}{69} = 0,0580,$$

welche nach der Zeichnung dem Kreise auch noch recht nahe liegen.

Für einen Ring dritter Ordnung ($r = 2,26$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein vierfacher Punkt

$$h_1 \mid h_2 \mid h_3 \mid \sum h^2 \mid \frac{\lambda}{a} \text{ nach (13)}$$

$$7 \mid 7 \mid 3 \mid 107 \mid \frac{7}{107} = 0,0561,$$

der im Photogramm tatsächlich zu sehen ist, während merkwürdigerweise der Punkt

$$4 \mid 9 \mid 3 \mid 106 \mid \frac{6}{106} = 0,0567,$$

fehlt. Eine Erklärung dafür läßt sich zurzeit nicht geben.

Auf dem Ring vierter Ordnung ($r = 2,88$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein auch im Photogramm vertretener vierfacher Punkt

$$8 \mid 8 \mid 4 \mid 144 \mid \frac{8}{144} = 0,0555,$$

während die Punkte

$$\left. \begin{array}{l} 11 \mid 3 \mid 4 \\ 7 \mid 9 \mid 4 \end{array} \right\} 146 \mid \frac{8}{146} = 0,0548$$

fehlen. Der Ring fünfter Ordnung liefert nach der Zeichnung keinen Punkt. Er würde im Photogramm schon vollkommen außerhalb des Bereiches der Interferenzpunkte liegen.

Übersieht man diese Zusammenstellung, so erscheint ziemlich sicher, daß λ/a zwischen 0,0555 und 0,0571 also etwa bei 0,0563 liegt, was nach (11) auf den Wert

$$\lambda = 1,90 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

führt. Unaufgeklärt bleibt nur das Fehlen des einen Punktes im Ring dritter Ordnung. Daß für λ/a nicht überall derselbe Wert herauskommt, liegt daran, daß die drei Beziehungen (12) nicht alle streng erfüllt sein können, wie in Gleichung (13) angenommen war. Ob die spektrale Breite der Strahlung so groß ist, daß alle Wellenlängen zwischen den angegebenen Grenzen vorkommen, muß noch dahingestellt bleiben. Dieser Wellenlänge entspricht zweifellos die stärkste von allen vom Zinksulfid ausgehenden Strahlungen.

Ganz analog findet man für den innersten schwachen Ring der vierzählig symmetrischen Aufnahme ($r = 1,01$ cm) die Punkte:

$$h_1 \mid h_2 \mid h_3 \mid \sum h^2 \mid \frac{\lambda}{a} \text{ nach (13)}$$

$$\left. \begin{array}{ccc} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{array} \right\} 51 \mid \frac{2}{51} = 0,0392,$$

von denen der erste achtfach, der zweite vierfach vertreten ist. Dazu gehört als Ring zweiter Ordnung der stark ausgebildete dritte Ring von innen ($r = 1,46$ cm) mit dem achtfachen Punkt

$$2 \mid 10 \mid 2 \mid 108 \mid \frac{4}{108} = 0,0370.$$

Weitere Ringe fehlen, trotzdem auf ihnen nach der Konstruktion noch weitere Punkte liegen könnten. Es stimmt dies damit überein, daß nach außen die Intensitäten der Interferenzpunkte schnell abnehmen.

Das Verhältnis λ/a dürfte somit für diese Gruppe von Interferenzpunkten zwischen 0,0392 und 0,0370 liegen, und zwar, da der innere Ring soviel schwächer als der äußere ist, näher an dem letzteren Wert. Nehmen wir $\lambda/a = 0,0377$ an, so wird nach (11)

$$\lambda = 1,27 \cdot 10^{-9} \text{ cm.}$$

Sehr auffällig sind in dem Photogramm die vier Gruppen von je drei engbenachbarten Flecken, welche im Abstand $r = 2,67$ cm vom Mittelpunkt auf den Koordinatenachsen liegen. Diese lassen sich ungezwungen durch einen Ring dritter Ordnung mit der Wellenlänge

$$\lambda = 0,0663 a = 2,24 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

erklären, auf welchem nach der Zeichnung die Punkte

$$\begin{array}{ccc} 0 & 9 & 3 & 90 & \mid & \frac{6}{90} = 0,0667 \\ 1 & 9 & 3 & 91 & \mid & \frac{6}{91} = 0,0659 \end{array}$$

liegen, von denen der erste ein vierfacher, der zweite ein achtfacher ist. Dieselbe Wellenlänge gehört zu einem Ring vierter Ordnung ($r = 3,31$ cm) mit den achtfachen Punkten

$$2 \mid 10 \mid 4 \mid 120 \mid \frac{8}{120} = 0,0667,$$

während der auch noch in Betracht kommende Punkt

$$h_1 \mid h_2 \mid h_3 \mid \sum h^2 \mid \frac{\lambda}{a} \text{ nach (13)}$$

$$1 \mid 10 \mid 4 \mid 117 \mid \frac{8}{117} = 0,0683$$

fehlt. Daß hier kein Ring zweiter Ordnung auftritt, erklärt die Zeichnung damit, daß der einzige dafür in Betracht kommende Punkt

$$3 \mid 7 \mid 2 \mid 62 \mid \frac{4}{62} = 0,0645$$

schon zu wenig zu dieser Wellenlänge paßt. Unerklärt bleibt dagegen, weswegen kein Ring erster Ordnung auftritt; der Punkt

$$2 \mid 5 \mid 1 \mid 30 \mid \frac{2}{30} = 0,0667$$

würde trefflich zu den oben angegebenen stimmen.

Ferner finden wir noch einen Ring erster Ordnung ($r = 1,78 \text{ cm}$) für die nur schwach vertretene Wellenlänge

$$\lambda = 0,1051 a = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

mit dem vierfachen Punkt

$$3 \mid 3 \mid 1 \mid 19 \mid \frac{2}{19} = 0,1051.$$

Ein Ring zweiter Ordnung tritt nicht auf, obwohl der Punkt

$$3 \mid 5 \mid 2 \mid 38 \mid \frac{4}{38} = 0,1051$$

gut zu den angegebenen paßte. Es erklärt sich dies wohl aus dem allgemeinen Abklingen der Intensität nach außen.

Die längste der bisher berechneten Wellenlänge ist aber

$$\lambda = 0,1428 a = 4,83 \cdot 10^{-9} \text{ cm},$$

welche mit dem achtfachen Punkt

$$2 \mid 3 \mid 1 \mid 14 \mid \frac{2}{14} = 0,1428$$

einen Ring erster Ordnung ($r = 2,12 \text{ cm}$) bildet. Der zugehörige Ring zweiter Ordnung würde schon außerhalb des Gesichtsfeldes liegen.

In Fig. 6, Taf. II ist, um den Vergleich mit der Erfahrung zu erleichtern, das Photogramm 5 auf Taf. II unmittelbar aus den hier angegebenen Zahlen h_1 , h_2 , h_3 nach den Gleichungen (13b) und unter der Annahme $z = 3,56$ cm nachkonstruiert worden. Der Leser mag sich selber durch Abgreifen mit dem Zirkel von der Übereinstimmung der Figur mit dem Photogramm überzeugen. Fortgelassen sind in der Zeichnung nur die beiden Punkte, deren Fehlen im Photogramm unerklärt blieb, und einige Punkte in den äußeren Teilen des Photogrammes, welche bisher noch nicht durchgerechnet sind. Abgesehen von den beiden mehrfach erwähnten Ausnahmen, erklärt also die Theorie, weshalb gerade die beobachteten Interferenzpunkte und nur diese auftreten, sie leistet dies unter Annahme von niedrigen Ordnungszahlen (≤ 10) und von Wellenlängen, welche von der erwarteten Größenordnung 10^{-9} cm sind.

An den obigen Angaben sind meiner Überzeugung nach sicher die Verhältnisse zwischen den Ordnungszahlen h_1 , h_2 , h_3 , von denen nach (13b) die Lage der Interferenzpunkte allein abhängt. Nicht ebenso sicher sind diese Zahlen selbst und damit auch nicht die angegebenen Werte der Wellenlängen. Immerhin sei bemerkt, daß ich mich für die angegebenen Werte erst nach Prüfung mancher anderer Möglichkeiten entschieden habe. Verdächtig ist z. B., daß die angegebenen Wellenlängen sich verhalten wie

$$1,27 : 1,90 : 2,24 : 3,55 : 4,83 = 4 : 6 : 7 : 11 : 15.$$

Wollte man alle errechneten Interferenzpunkte auf die Wellenlänge $\frac{1}{4} \cdot 1,27 \cdot 10 = 3,20 \cdot 10^{-10}$ cm zurückführen, so müßten, soweit ich sehe, noch viele andere Interferenzpunkte vorhanden sein, die tatsächlich nicht auftreten. Wie dem aber auch sein mag, in der Übereinstimmung der Fig. 6 mit dem Photogramm 5 scheint mir eine weitgehende Bestätigung der Interferenztheorie dieser Erscheinungen zu liegen.

Zusätze (März 1913).

1. In den obigen Auseinandersetzungen wird stets nur von einem einfachen Raumgitter gesprochen. Bekanntlich aber nötigt die Tatsache, daß hemiedrische Kristalle vor-

kommen, zu der Annahme, daß die Struktur im allgemeinen aus mehreren kongruenten, aber gegeneinander verschobenen Raumgittern besteht; selbst bei holodrisch regulären Kristallen kommen Raumgitter vor, bei denen der Mittelpunkt jedes Elementarwürfels oder auch die Mittelpunkte der Würfel-seiten mit Atomen besetzt sind.¹⁾ In diesen Fällen treten außer den Atomen, deren Orte durch die Gleichungen (1) bestimmt sind, andere, von den ersteren im allgemeinen verschiedene, auf, die in den Punkten

$$x' = (m + \delta') a_{1x} + (n + \epsilon') a_{2x} + (p + \zeta') a_{3x},$$

$$y' = (m + \delta') a_{1y} + (n + \epsilon') a_{2y} + (p + \zeta') a_{3y},$$

$$z' = (m + \delta') a_{1z} + (n + \epsilon') a_{2z} + (p + \zeta') a_{3z}$$

liegen. Unter Umständen kommt noch eine dritte und vierte Art usw. hinzu, an den Orten:

$$x'' = (m + \delta'') a_{1x} + (n + \epsilon'') a_{2y} + (p + \zeta'') a_{3z} \text{ usw.},$$

$$x''' = (m + \delta''') a_{1y} + (n + \epsilon''') a_{2x} + (p + \zeta''') a_{3z}.$$

usw. Die δ , ϵ , ζ sind dabei echte Brüche, deren Werte für das Punktsystem charakteristisch sind. Die Vektoren

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \delta' \mathbf{a}_1 + \epsilon' \mathbf{a}_2 + \zeta' \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{r}'' = \delta'' \mathbf{a}_1 + \epsilon'' \mathbf{a}_2 + \zeta'' \mathbf{a}_3, \\ \mathbf{r}''' = \delta''' \mathbf{a}_1 + \epsilon''' \mathbf{a}_2 + \zeta''' \mathbf{a}_3 \end{cases}$$

usw. führen von einem ungestrichenen Atom zu den benachbarten ein-, zwei- und dreigestrichenen; ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen sind deshalb gleich $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ usw. Da sich die durch die Striche unterschiedenen Atome i. A. verschieden verhalten, müssen wir ihnen auch verschiedene Funktionen Ψ , Ψ' usw. zuschreiben.

In diesem Fall tritt an die Stelle der Summe (4):

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{-ikR}}{R} \{ \Psi(\alpha, \beta) \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) - y(\beta - \beta_0) - z(\gamma - \gamma_0)]} \\ & \quad + \Psi'(\alpha, \beta) \sum e^{ik[x'(\alpha - \alpha_0) + y'(\beta - \beta_0) + z'(\gamma - \gamma_0)]} + \dots \} \\ & = \frac{e^{-ikR}}{R} \{ \Psi(\alpha, \beta) + \Psi'(\alpha, \beta) e^{iR} + \Psi''(\alpha, \beta) e^{iR'} + \dots \} \\ & \quad \sum_m \sum_n \sum_p e^{i(mA + nB + pC)}, \end{aligned} \right.$$

1) P. Groth, Physikalische Kristallographie, Leipzig 1905. p. 272 u. f.

wo A, B, C die in (5) angegebenen Werte haben, während analog

$$(17) \quad \begin{cases} R' = k(r'_x(\alpha - \alpha_0) + r'_y(\beta - \beta_0) + r'_z(\gamma - \gamma_0)), \\ R'' = k(r''_x(\alpha - \alpha_0) + r''_y(\beta - \beta_0) + r''_z(\gamma - \gamma_0)) \end{cases}$$

ist. Man sieht, daß der einzige Unterschied gegen früher in der Ersetzung der Funktion Ψ durch die Klammer besteht. Es werden eben eine ganze Schar benachbarter Atome als ein Gitterelement wirken. Obwohl so die Grundzüge der Theorie erhalten bleiben, kann doch diese Abänderung gelegentlich für die beobachtete Interferenzerscheinung wichtig sein; denn der Klammerausdruck kann an Stellen, an denen die Summe

$$\sum_m \sum_n \sum_p e^{i(mA + nB + pC)}$$

ihrem absoluten Wert nach ein Maximum hat, Null sein, so daß durch das Zusammenwirken der Atome eines Gitterelementes Interferenzpunkte, die sonst auftreten sollten, ausgelöscht werden. Die neuerdings von Hrn. Friedrich sowie vom Verfasser und Hrn. Tank beobachteten Folgen¹⁾ hemidrischer Strukturen sind auf diese Art zu erklären.

2. Die sehr verwunderliche und noch unerklärte Tatsache, daß die spektral hochgradig inhomogenen Impulse der einfallenden Röntgenstrahlung im Kristall Schwingungen von recht genau definierter Wellenlänge hervorrufen (denn nur durch solche läßt sich die Schärfe der beobachteten Interferenzpunkte m. E. einfach erklären), hat gesprächsweise gelegentlich die Deutung gefunden, daß die Auswahl dieser Sinusschwingungen aus allen in den Impulsen vorhandenen eine Funktion des Raumgitters sei. Demgegenüber wollen wir zeigen, daß die (bei Vorhandensein der erforderlichen Schwingungen) nach (12) möglichen Interferenzmaxima überall dicht liegen, so daß die photographische Platte vollständig geschwärzt werden müßte, wenn nicht die in den Funktionen $\Psi(\alpha, \beta)$ ausgesprochenen Eigenschaften der Gitterelemente eine bestimmte endliche Zahl aus den unendlich vielen Wellenlängen der ursprünglichen Strahlung aussonderten. Daß wir uns dabei auf den in den Gleichungen (8) betrachteten und in Fig. 5 dargestellten besonderen Fall beschränken, ist für das Ergebnis unwesentlich.

1) Vgl. die Anm. auf p. 984 und eine der folgenden Arbeiten.

Führen wir in der Ebene der photographischen Platte ($z = \text{const}$) Polarkoordinaten ϱ, φ ein

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi,$$

so wird nach (13b)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h_2}{h_1}, \quad \varrho = 2z \frac{\sqrt{u}}{|1-u|}, \quad \text{wo} \quad u = \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Es sind also in praxi alle Werte von φ möglich, weil man mit zwei ganzen Zahlen h_1 und h_2 stets das Verhältnis $h_2:h_1$ jedem vorgeschriebenen Werte beliebig annähern kann. Ist dies Verhältnis festgesetzt, so kann man noch immer durch geeignete Wahl von h_1 und h_2 mit u bis auf einen beliebig kleinen Fehler jeden Wert erreichen, so daß dasselbe auch für den Radiusvektor ϱ gilt.¹⁾

3. Die in der Arbeit „Eine quantitative Prüfung“ usw. gegebene Durchrechnung der vierzählig-symmetrischen Aufnahme 5 soll hier noch ergänzt werden. Es fehlten damals noch drei achtfache Punkte, die auf dem Photogramm selbst deutlich, in der Reproduktion aber wohl nur schwer sichtbar sind. Die beiden ersten sind auch auf dem Original nur an je vier Stellen vertreten, die anderen Stellen liegen außerhalb des zur Aufnahme dienenden Films; deshalb ist auch die Bestimmung ihrer Koordinaten und die Übereinstimmung zwischen deren (unter der Annahme $z = 3,56 \text{ cm}$) nach (13b) berechneten und beobachteten Werten geringer als sonst. Immerhin sprechen die Werte der Wellenlängen, die wir nach (13) aus ihren Ordnungszahlen finden, für die Richtigkeit unserer Angaben, weil sie zu den früher berechneten in rationalen Verhältnissen stehen. Es sind dies die Punkte:

h_1	h_2	h_3	x berechn.	y berechn.	x gemess.	y gemess.	$\frac{\lambda}{\alpha}$ nach (13)
7	3	3	3,05	1,30	2,96	1,28	0,0895
12	9	8	4,36	3,27	4,47	3,25	0,0563
3	1	1	2,37	0,79	2,36	0,79	0,182

Man sieht, daß hier die Zahl der Wellenlängen noch um zwei vermehrt wird; denn nur der Wert 0,0563 ist schon

1) Für freundlichen Rat hierbei bin in Hrn. Kollegen P. Bernays zu Dank verpflichtet.

früher vorgekommen. Nun war aber schon früher (p. 998) darauf hingewiesen, daß sich alle berechneten Wellenlängen als ganze Vielfache eines einzigen Wertes darstellen. Wir stellen in der folgenden Tabelle alle Werte von λ/a und die entsprechenden Vielfachen von $4,75 \cdot 10^{-8}$ zusammen, eines Wertes, der der Hälfte des früher angegebenen ($\lambda = 3,20 \cdot 10^{-10}$) entspricht.

0,0377	0,0563	0,0663	0,0895	0,1051	0,1428	0,182
8	12	14	19	22	30	38
0,0380	0,0570	0,0665	0,0903	0,1045	0,1426	0,1805

In der ersten Zeile steht hier der berechnete Wert von λ/a , in der zweiten die ganze Zahl, mit der $4,75 \cdot 10^{-8}$ zu multiplizieren ist, um den in der dritten Zeile stehenden Wert zu erhalten. Wir wollen schon hier mitteilen, daß auch die in anderem Zusammenhang zu veröffentlichende Durchrechnung des dreizählig-symmetrischen Photogramms 7 für eine erhebliche Zahl von Interferenzpunkten auf Wellenlängen führt, die ganze Vielfache desselben Wertes sind.

Auch die Berechnung der Gitterkonstanten a läßt sich jetzt verbessern; nach Hrn. Tutton¹⁾ sind in der Zinkblende 32 ineinander gestellte Raumgitter von der Art des betrachteten vorhanden. Die Hälfte besteht aus Zink-, die Hälfte aus Schwefelatomen. Infolgedessen kommen nicht je ein Atom dieser beiden Arten auf einen Elementarkubus, sondern je 16; Gleichung (10) ist infolgedessen abzuändern in

$$(10a) \quad \frac{N}{16} a^3 = \frac{m}{\delta},$$

sodaß

$$(11a) \quad a = 8,53 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

wird. Aus den angegebenen Werten von λ/a folgt dann

$$\lambda = 3,24 \cdot 10^{-8}; \quad 4,86 \cdot 10^{-8}; \quad 5,66 \cdot 10^{-8}; \quad 7,70 \cdot 10^{-8}; \\ 8,90 \cdot 10^{-8}; \quad 1,214 \cdot 10^{-7}; \quad 1,540 \cdot 10^{-7}.$$

1) A. E. H. Tutton, Nature 90. p. 306. 1912.

(Eingegangen 15. März 1913.)

5. Die Gestalt der Interferenzpunkte bei den Röntgenstrahlinterferenzen; von M. Laue und F. Tank.

(Hierzu Tafel V.)

1. Einleitung.

Bei den von W. Friedrich und P. Knipping¹⁾ veröffentlichten Interferenzaufnahmen an Röntgenstrahlen erscheinen die Helligkeitsmaxima stets als längliche Striche senkrecht zu dem Radiusvektor, welcher vom Durchstoßpunkt der einfallenden Strahlen nach ihrem Orte führt; sie liegen tangentiell, wie wir uns kurz ausdrücken wollen. Am deutlichsten tritt dies vielleicht bei der vierzählig-symmetrischen Aufnahme am Zinksulfid (Photogramm 5 oder 10 l. c.) hervor. Auch die Verfasser haben bei ihren Untersuchungen an anderen Kristallen fast stets diese Erscheinung beobachtet; wenigstens solange der Abstand des Kristalls von der Antikathode nicht zu groß war. Da sie aber bald den Eindruck gewannen, daß mit zunehmendem Abstand die Länglichkeit der Flecke schwindet, wurden an Flußspath drei vierzählig-symmetrische Aufnahmen gemacht, bei welchen der genannte Abstand 50, 100 und 150 cm betrug (bei Friedrich und Knipping waren es 35 cm). Die Figg. 1, 2, 3 auf Taf. V geben diese Aufnahmen wieder.²⁾ Man erkennt, daß die Länglichkeit bei den beiden ersten noch vorhanden ist, während sie in der

1) W. Friedrich, P. Knipping u. M. Laue, Münch. Sitzungsber. p. 308. 1912; Ann. d. Phys. 41. p. 971. 1913.

2) Die Versuchsanordnung entsprach ganz der von Friedrich und Knipping verwendeten; ihre Beschreibung verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit. Man sieht an den Photogrammen, daß die Lage der Interferenzpunkte bei Flußspat genau dieselbe ist, wie bei Zinksulfid unter den entsprechenden Umständen; nur in der Intensität der verschiedenen Punkte zeigen sich Unterschiede. Auch bei anderen regulären Kristallen, Cu_2O und NaCl , hat sich dies gefunden.

dritten fehlt. Was in dieser noch von Form bei den Flecken sichtbar ist, rührt von der Gestalt und den zeitlichen Verschiebungen des von den Kathodenstrahlen getroffenen Fleckes auf der Antikathode her. Es handelt sich somit hier um einen Einfluß der Entfernung Antikathode—Kristall, oder, was dasselbe sagt, um einen Einfluß der Krümmung der einfallenden Wellen.¹⁾

2. Theorie dieser Erscheinung.

Daß ein derartiger Einfluß auftritt, und daß er gerade das beobachtete Ergebnis hat, läßt sich nun auch leicht theoretisch begründen. Bisher betrachtete die Theorie die einfallenden Wellen als eben und brachte dementsprechend die Phase in der Schwingung des Atoms am Orte x, y, z durch den Faktor

$$e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$$

in der Summe 3 der angeführten Arbeit zum Ausdruck. Ist aber der Abstand der (punktförmig gedachten) Strahlungsquelle von diesem Atom endlich und zwar gleich r' , so muß man diesen Faktor ersetzen durch

$$\frac{1}{r'} e^{-ikr'}$$

Beschränken wir uns von vornherein auf die bei den Fig. 5 und 10 der angeführten Arbeit und den hier beigegebenen Photogrammen vorliegenden Verhältnisse, legen wir ferner wie auch früher²⁾ die drei Koordinatenachsen in die drei Richtungen der Würfelkanten des kubischen Raumgitters, und zwar die z -Achse parallel zu den einfallenden Strahlen, so müssen wir die Strahlungsquelle in einem Abstand R' vom Nullpunkt auf der negativen z -Achse annehmen. Für

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + R')^2}$$

ist dann im Exponenten bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung in x, y, z

1) Schon bei der Diskussion zum Vortrag von M. Laue in der Deutsch. Physik. Ges. am 14. Juni 1912 wies Hr. H. Rubens darauf hin, daß bei der Kleinheit der in Frage kommenden Wellenlängen ein solcher Einfluß wahrscheinlich wäre.

2) M. Laue, Münch. Sitzungsber. p. 363. 1912; Ann. d. Phys. 41. p. 989. 1913.

$$\begin{aligned}
 r' &= R' \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R'^2}} + \frac{2z}{R'} \\
 &= R' \left\{ 1 + \left(\frac{z}{R'} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R'^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R'^2} \right\} \\
 &= R' + z + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R'} \\
 &\quad \left(\text{da } \sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

zu setzen, während im Nenner $r' = R'$ eine hinreichende Näherung ist. Entsprechend das frühere Verfahren ganz dem in der Theorie der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen üblichen, so befolgen wir jetzt genau die bei den Fresnelschen Beugungserscheinungen gebräuchliche Methode; nur mit dem Unterschied, daß wir im folgenden den Aufpunkt als in unendlicher Entfernung liegend betrachten. Der Interferenzeffekt aller von den Gitterelementen ausgehenden Wellen ist daher statt durch die Summe 3 der ersten Abhandlung gegeben durch:

$$\frac{1}{R'} \sum \psi \frac{e^{-ik(r+r')}}{r} = \frac{1}{R} \sum \frac{\psi}{r} e^{-ik\left(r+R'+z+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{R'}\right)}$$

oder, wenn man für r die früher angegebene lineare Näherung beibehält, nach den Gleichungen (1) derselben Arbeit, die sich unter den betrachteten Umständen zu

$$x = ma, \quad y = na, \quad z = pa$$

vereinfachen, durch:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{aligned}
 &\psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ik(R+R')}}{R R'} \sum e^{ik\left(x\alpha + y\beta + z(\gamma-1) - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R'}\right)} \\
 &= \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ik(R+R')}}{R R'} \\
 &\quad \times \sum_{m=-M}^{M-1} \sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{p=-P}^{P-1} e^{ik\left\{ m\alpha a + n\alpha\beta + p\alpha(\gamma-1) - \frac{1}{2} (m^2 + n^2) \frac{a^2}{R'} \right\}} \\
 &= \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ik(R+R')}}{R R'} \\
 &\quad \times \sum_{m=-M}^{M-1} e^{ik\left(m\alpha a - \frac{1}{2} \frac{m^2 a^2}{R'}\right)} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{ik\left(n\alpha\beta - \frac{1}{2} \frac{n^2 a^2}{R'}\right)} \sum_{p=-P}^{P-1} e^{ikp\alpha(\gamma-1)}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Man erkennt sogleich, daß die dritte dieser Summen, S_3 , bei Berechnung der Intensität den Faktor

$$(1a) \quad |S_3|^2 = \frac{\sin^2 P k a (\gamma - 1)}{\sin^2 \frac{1}{2} k a (\gamma - 1)}$$

ergibt, ganz wie wenn ebene Wellen einfielen. Die erste dieser Summen hingegen, welche allein aufträte, wenn es sich um ein gewöhnliches Gitter mit Strichen parallel zur x -Richtung handelte, zeigt den Einfluß des Krümmungsradius R , desgleichen die zweite. Wir werden sehen, daß dieser Unterschied für die beobachtete Erscheinung maßgebend ist.

Um die Summe

$$S_1 = \sum_{-M}^{M-1} e^{ik \left(m a a - \frac{1}{2} \frac{m^2 a^2}{R} \right)}$$

zu berechnen, entwickeln wir die Funktion $e^{-i u m^2}$ für den Bereich von $-M$ bis $+M$ in eine Fouriersche Reihe:

$$e^{-i u m^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_\nu e^{i \nu \pi \frac{m}{M}}, \quad C_\nu = \frac{1}{2M} \int_{-M}^{+M} e^{-i(u \mu^2 + \frac{\nu \pi}{M} \mu)} d\mu.$$

Führen wir sodann als Integrationsvariable

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sqrt{u} \mu + \frac{\nu \pi}{2M\sqrt{u}} \right\}$$

ein, so wird:

$$C_\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2M\sqrt{2u}} e^{i \frac{\nu^2 \pi^2}{4M^2 u}} \int_{\xi_\nu}^{\xi_\nu'} e^{-i \frac{\pi}{2} \xi^2} d\xi,$$

wobei

$$\xi_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\sqrt{u} M + \frac{\nu \pi}{2M\sqrt{u}} \right\}, \quad \xi_\nu' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ +\sqrt{u} M + \frac{\nu \pi}{2M\sqrt{u}} \right\}.$$

Setzen wir schließlich

$$u = \frac{1}{2} \frac{k a^2}{R},$$

so finden wir

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} S_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_v \sum_{-M}^{M-1} e^{im} \left(k\alpha\alpha + \frac{v\pi}{M} \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_v (-1)^v \frac{e^{-iMk\alpha\alpha} - e^{+iMk\alpha\alpha}}{1 - e^{i \left(k\alpha\alpha + \frac{v\pi}{M} \right)}} \\ &= i \sum_{-\infty}^{+\infty} C_v (-1)^{v+1} \frac{2 \sin M k \alpha \alpha}{1 - e^{i \left(k\alpha\alpha + \frac{v\pi}{M} \right)}}. \end{aligned} \right.$$

Da $k = 2\pi/\lambda$ ist, wird gleichzeitig

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} C_v &= \frac{v}{2} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} \int_{\xi_v}^{\xi_v'} e^{-i \frac{\pi}{2} \xi^2} d\xi, \\ \text{wo} \\ \xi_v &= -\frac{1}{v} + vv, \quad \xi_v' = +\frac{1}{v} + vv, \quad v = \frac{1}{M\alpha} \sqrt{\frac{\lambda R'}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Wie man hier sieht, ist

$$\xi_{-v} = -\xi_v', \quad \xi_{-v}' = -\xi_v,$$

deshalb

$$\int_{\xi_{-v}}^{\xi_{-v}'} e^{-i \frac{\pi}{2} \xi^2} d\xi = \int_{-\xi_v'}^{-\xi_v} e^{-i \frac{\pi}{2} \xi^2} d\xi = \int_{\xi_v}^{\xi_v'} e^{-i \frac{\pi}{2} \xi^2} d\xi$$

und

$$C_{-v} = C_v.$$

Zur Diskussion dieses Ausdruckes für S_1 beginnen wir mit der Bemerkung, daß die Koeffizienten C_v wegen der in ihnen auftretenden Fresnelschen Integrale mit immer weiter wachsendem $|v|$ immer kleiner werden. Darauf beruht die Konvergenz der Fourierschen Reihe für $e^{-i\alpha m^2}$, die sich auf die Reihe 2 überträgt, da die Summation nach m nur über eine endliche Zahl von Summanden zu erstrecken ist. Der Bruch

$$\frac{2 \sin M k \alpha \alpha}{1 - e^{i \left(k\alpha\alpha + \frac{v\pi}{M} \right)}},$$

mit dem C_ν multipliziert ist, hat seinem absoluten Wert

$$\left| \frac{\sin [M k a \alpha]}{\sin \left[\frac{1}{2} \left(k a \alpha + \frac{\nu \pi}{M} \right) \right]} \right|$$

nach scharfe Maxima vom Betrage $2M$, wo

$$k a \alpha + \frac{\nu \pi}{M} = 2h\pi, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \left(h - \frac{\nu \pi}{2M} \right) \frac{\lambda}{a}$$

ist; sonst ist er immer sehr klein gegen M und zwar gilt dies auch schon an den Stellen

$$\alpha = \left(h - \frac{(\nu \pm 1)\pi}{2M} \right) \frac{\lambda}{a},$$

an denen die Faktoren von $C_{\nu+1}$ und $C_{\nu-1}$ ihre Maxima haben. Infolgedessen ist in der Nähe von

$$(4) \quad \alpha = \left(h - \frac{\nu \pi}{2M} \right) \frac{\lambda}{a}$$

in guter Annäherung:

$$(5) \quad |S_1|^2 = |C_\nu|^2 \frac{\sin^2 [M k a \alpha]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} \left(k a \alpha + \frac{\nu \pi}{M} \right) \right]}.$$

Ist R' sehr groß, so ist nach (3) ν sehr groß und das Fresnelsche Integral hat als Grenzen $\xi_\nu = \xi'_\nu = \pm \infty$, je nach dem ν positiv oder negativ ist. In beiden Fällen verschwindet C_ν . Eine Ausnahme macht aber der Wert $\nu = 0$, für den, da dann ξ_ν und ξ'_ν sehr klein sind,

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi'_\nu} e^{-i\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi = \int_{\xi_\nu}^{\xi'_\nu} d\xi = \frac{2}{\nu}$$

ist, so daß $C_0 = 1$ wird. Wir gelangen so zum Fall einer ebenen Welle zurück, in welchem $|S_1|$ ein einziges Maximum an jeder Stelle

$$\alpha = h \frac{\lambda}{a},$$

wo h eine ganze Zahl ist, besitzt. Bei endlichen Werten von R' treten hingegen nach (4) und (5) neben jedes dieser Hauptmaxima eine Reihe allmählich an Intensität (entsprechend den $|C_\nu|^2$) abnehmender Nebenmaxima, und zwar, da ν sowohl positiv als

negativ sein kann und $C_{-} = C_{+}$ ist, treten diese symmetrisch zu beiden Seiten auf. Die Folge ist eine Verbreiterung und Verwaschung des Hauptmaximums. Bei einem ebenen Gitter verbreitern sich die Interferenzmaxima, wenn man die Lichtquelle dem Gitter nähert. Diese Tatsache ist qualitativ ja auch leicht verständlich, da die Schärfe der Maxima wesentlich davon abhängt, daß zwischen je zwei interferierenden Schwingungen genau die gleiche Phasendifferenz besteht; diese Bedingung ist aber nur bei unendlicher Entfernung der Lichtquelle erfüllt.

Bei einem Kreuzgitter würden in dem Produkte (1) nur die beiden ersten Summen S_1 und S_2 auftreten. Da sich alles über S_1 Gesagte ohne weiteres auf S_2 überträgt, so müssen sich auch die Kreuzgitterspektren, welche bei unendlicher Entfernung der Lichtquelle scharfe Punkte sind, bei deren Annäherung verwaschen. Beim Raumgitter aber schneiden die Kreise $\gamma = \text{konst.}$, auf welchen nach (1a) die in ihrer Schärfe unbeeinflußten Maxima von $|S_3|^2$ liegen, die Gebiete, in welchem eine merkliche Helligkeit auftritt, aus den verwaschenen Kreuzgitterspektren heraus. Es leuchtet ein, daß diese Gebiete die Form tangentiell liegender Striche erhalten. Damit ist aber die beobachtete Erscheinung gedeutet. Es kann diese Erklärung als sehr anschaulich bezeichnet werden; denn so selbstverständlich es war, daß beim Kreuzgitter, das senkrecht bestrahlt wird, ein Einfluß der Krümmung auftritt, so selbstverständlich ist es, daß dieser Einfluß auf die Interferenzerscheinung fehlt, wenn eine mit Gitterelementen gleichmäßig besetzte Linie in ihrer eigenen Richtung bestrahlt wird. Der Interferenzeffekt auf den Kreisen $\gamma = \text{konst.}$, rührt aber gerade von den Gitterelementen einer solchen Linie her. Daß nicht alle derartigen Linien genau in ihrer Richtung bestrahlt werden, kommt in der hier angewandten Näherung noch nicht zum Ausdruck.

An dieser anschaulichen Form der Theorie erkennt man auch, daß tangentiell liegende längliche Flecke auch bei Durchstrahlung des Kristalls parallel zu irgend einer anderen kristallographischen Hauptrichtung auftreten müssen. Tatsächlich zeigen auch die Figg. 4, 7 und 11 bei Friedrich und Knipping denselben Effekt. In allen diesen Fällen schneiden

eben scharfe Kreise um den Durchstoßpunkt der primären Strahlen die sichtbaren Helligkeitsgebiete aus gewissen, infolge der Krümmung der einfallenden Wellen verbreiteten Gebieten aus.

3. Über die Regelmäßigkeit der Raumgitter der Kristalle.

Für die Interferenztheorie der Erscheinungen, welche bei der Durchstrahlung der Kristalle mit Röntgenstrahlen auftreten, besteht die einzige, aber freilich erhebliche Schwierigkeit in der Rolle, welche man der Wärmebewegung dabei zuschreiben soll. Bei einer Diskussion darüber in der Deutschen physikalischen Gesellschaft¹⁾ äußerte Hr. Planck die Meinung, daß vielleicht erhebliche Teile des Raumgitters nach Amplitude und Phase fast die gleichen Schwingungen haben und sich so relativ zueinander nicht oder nur unbedeutend verschieben. Es würde dann zwar nicht der ganze Kristall, soweit er bestrahlt ist, als ein einheitliches Raumgitter wirken, wohl aber wäre dies bei jedem derartigen Teil der Fall.

Wir haben nun gesehen, daß kein Einfluß der Krümmung der einfallenden Wellen mehr sichtbar wird, wenn der Abstand Antikathode—Kristall bis auf 150 cm gewachsen ist. Wir müssen auf Grund der obigen Rechnungen schließen, daß dann nur noch wenige Glieder in der Reihe 2 eine Rolle spielen; und dies gestattet, eine wenn auch rohe Schätzung der Größe

$$v = \frac{1}{Ma} \sqrt{\frac{\lambda R}{2}}$$

nach (3) auszuführen. Ist nämlich $v = 2$, so berechnet man mit Hilfe der Tafeln für die Fresnelschen Integrale²⁾ leicht, daß

$$|C_{10}|^2 : |C_0|^2 = 5,9 \cdot 10^{-3},$$

während für $v = 1$

$$|C_{10}|^2 : |C_0|^2 = 7,4 \cdot 10^{-2}$$

1) Nach dem Vortrag von M. Laue am 14. Juni 1912.

2) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909, p. 25.

wäre. In dem letzteren Falle müßte wohl schon eine Verbreiterung in der tangentiellen Richtung sichtbar sein. Nehmen wir also $v = 2$, d. h.

$$\frac{Ma}{\sqrt{1R}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

an, setzen wir ferner

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-9} \text{ cm}, \quad a = 8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}, \quad R = 150 \text{ cm.}^1)$$

so finden wir für die Zahl der in der x -Richtung nebeneinander gelegenen Gitterelemente

$$2M = 7,5 \cdot 10^3.$$

Für die Zahl $2N$ und $2P$ der Gitterelemente in der y - und z -Richtung würde natürlich dasselbe gelten. Die Beobachtungen führen also auf eine der Größenordnung nach bestimmte Ausdehnung

$$2Ma = 6 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

des Raumgitters. Der durchleuchtete Teil des Kristalles hatte aber in allen Richtungen Abmessungen von einigen hundertstel Zentimeter. Man sieht hier also unmittelbar, daß nicht der ganze Flußspatkristall als einheitliches Raumgitter wirkt, sondern nur gewisse kleine Teile von ihm, welche freilich noch sehr viele Gitterelemente umfassen. Ist diese Störung der Regelmäßigkeit durch die Wärmebewegung bedingt, so müssen die Abmessungen der in sich regelmäßigen Teile bei tiefen Temperaturen zunehmen, und es muß daher die Länglichkeit der Interferenzpunkte auch bei solchen Abständen der Antikathode vom Kristall auftreten, bei welchen sie bei gewöhnlicher Temperatur nicht mehr sichtbar ist. Versuche, welche diese Vermutung prüfen sollen, sind in Vorbereitung.

Dem Institut international de physique Solvay sagen wir für die zur Durchführung der erwähnten Versuche gewährten reichlichen Mittel unseren verbindlichsten Dank.

Zürich, Physik. Inst. d. Univers. März 1913.

1) Über die Herkunft dieser Zahlen vgl. den dritten Zusatz zu der Arbeit von M. Laue, Ann. d. Phys. 41. p. 989. 1913.

(Eingegangen 25. März 1913.)

**6. Über ein von H. Th. Simon
angegebenes Spektralphotometer für Ultraviolett¹⁾;
von Franz Peter Defregger.**

(Hierzu Taf. VI, Figg. 1–3.)

Mitteilung aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität
Göttingen.)

Inhalt: Einleitung p. 1012. — I. Der verbesserte Simonsche Apparat. 1. Der Registrierapparat p. 1012; 2. Der Auswertungsapparat oder Helligkeitskomparator p. 1017. — II. Die Mängel des Apparates und deren Behebung. 1. Änderungen am Registrierapparat p. 1019; 2. Der Helligkeitskomparator; a) Schwächen des vorhandenen Komparators p. 1019; b) Die neue Form des Komparators p. 1021; 3. Die Beleuchtungseinrichtung p. 1027. — III. Diskussion der Fehlerquellen und experimentelle Fehlerbestimmungen. 1. Fehler der Registrierung p. 1034; 2. Fehler der Platten und der Entwicklung p. 1039; 3. Fehler der Auswertung p. 1041; 4. Gesamtfehler p. 1043. — IV. Absorptionsmessungen p. 1046. — V. Vorschläge zur konstruktiven Verbesserung des Apparats p. 1050. 1. Gesamtanordnung p. 1051; 2. Kuppelung p. 1052; 3. Die Auswertung p. 1052. — VI. Zusammenfassung p. 1054.

Einleitung.

1896 hat H. Th. Simon¹⁾ eine photographische Methode der Photometrie des ultravioletten Lichtes angegeben.

Sein Photometer war im wesentlichen ein Spektralapparat, dessen Spalt in seiner oberen Hälfte von der weniger intensiven, in seiner unteren von der intensiveren Lichtquelle beleuchtet wurde, wobei das auf die untere Hälfte fallende Licht durch eine rotierende Sektorenscheibe mit kontinuierlich sich verändernden Ausschnitten allmählich immer mehr geschwächt wurde. Gleichzeitig registrierte eine photographi-

i) Auszug aus der gleichlautenden Dissertation. Göttingen 1913.

2) Hermann Th. Simon, Habilitationsschrift. Erlangen 1896 und Ann. d. Phys. 59. p. 61. 1896.

sche Platte, die hinter einem Okularspalt gleichförmig vorbeibewegt wurde, automatisch die allmähliche Abschwächung der größeren Intensität. So konnte nachträglich der Schwächungsfaktor der Sektorenscheibe bestimmt werden, der nötig war, um auf die Spalthälften gerade gleiche Lichtintensitäten gelangen zu lassen.

Da bei intermittierender Beleuchtung, wie die Sektorenscheibe sie liefert, das Bunsen-Roscoesche Schwärzungsgesetz nicht mehr richtig ist, wurde bei einem zweiten von H. Th. Simon angegebenen und bei Zeiss konstruierten Apparat, den ich sogleich beschreiben werde, an Stelle der Sektorenscheibe eine andere Lichtschwächungseinrichtung verwendet.

Für die weiteren Ausführungen will ich folgende Terminologie festsetzen: Wenn eine Lichtmenge J_0 senkrecht auf eine absorbierende planparallele Schicht auffällt, davon die Menge J_0' eindringt, J_1' bis an die zweite Grenzfläche gelangt und J_1 unreflektiert austritt, wenn ferner $J_2, J_3 \dots$ weitere nach zweimaliger, viermaliger usw. Reflexion austretende Mengen sind, so nenne ich *Durchlässigkeit* den Quotienten $D = J_1 + J_2 + J_3 + \dots / J_0 = J/J_0$, *Absorptionsverhältnis* den Quotienten $A = J_1'/J_0'$.

Ferner sei der *Absorptionskoeffizient* a definiert durch die Gleichung $A = J_1/J_0' = a^d$, wo d die Schichtdicke bedeutet; die *Absorptionskonstante* k durch $A = J_1'/J_0' = e^{-kd}$, und *dekadische Absorptionskonstante* α durch $A = J_1'/J_0' = 10^{-\alpha d}$.

Ich bemerke noch, daß ich die Schichtdicke immer in cm messe, und daß ich die Buchstaben D, A, a, k, α überstreichen will ($\overline{D}, \overline{A}, \overline{a}, \overline{k}, \overline{\alpha}$), wenn sie nicht die wirklichen, sondern die durch Messung gewonnenen, also mit einem Fehler behafteten Größen bedeuten sollen.

Wo es sich um meßbare Schwächung des Lichtes mit Hilfe besonderer Einrichtungen zum Zwecke des Photometrieens handelt, will ich analog zu der Bezeichnung Absorptionsverhältnis den Ausdruck *Schwächungsverhältnis* gebrauchen.

I. Der verbesserte Simonsche Apparat.

1. Der Registrierapparat.

Der äußeren Form nach ist der zweite Simonsche Apparat ein größerer, ziemlich schwer gebauter Spektralapparat.

Der Spalt S (vgl. Fig. 1) ist durch eine seitlich verschiebbare Blende B in zwei Teile geteilt, deren Abstand, wie aus der Figur zu ersehen ist, durch Verschiebung der Blende geändert werden kann. Der Zweck dieser Einrichtung wird weiter unten klar werden.

Das von dem Doppelspalt ausgehende Licht wird durch die Kollimatorlinse, ein Quarz-Flußspatachromat von 481,6 mm

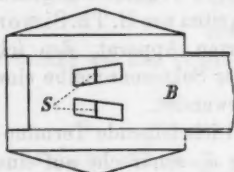


Fig. 1.

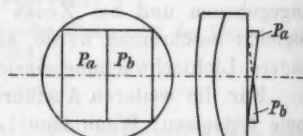


Fig. 2.

Brennweite, parallel gemacht und durch das automatisch immer auf Minimum der Ablenkung eingestellte Doppelprisma aus Quarz zerlegt. Es tritt dann durch das Objektiv, ein dem anderen kongruenter Achromat. Auf die plane Innenfläche des Objektivs sind zwei kongruente Quarzprismen von kleinen brechenden Winkeln so „aufgesprengt“, daß sie mit einer Grundfläche aneinander stoßen und die brechenden Kanten nach entgegengesetzten Seiten wenden, nämlich das eine nach unten, das andere nach oben, wie dies aus der Fig. 2, die das System in Vorder- und Seitenansicht darstellt, zu ersehen ist. Die von den Prismen P_a und P_b freigelassenen Teile der Objektivöffnung sind durch eine quadratische Blende abgedeckt. Die beiden Prismen bewirken, daß die rechts durch das Objektiv kommenden Strahlen nach unten, die links durchfallenden nach oben abgelenkt werden, so daß von jedem der beiden Spaltteile zwei übereinanderliegende Spektren erzeugt werden, nämlich ein von der linken und ein von der rechten Objektivhälfte entworfenen. Durch geeignete Wahl der brechenden Winkel der Prismen ist dafür gesorgt, daß sich die vier Spektren nicht überdecken, sondern oben die beiden vom unteren Spalt herrührenden und unmittelbar darunter die vom oberen herrührenden erscheinen. Blendet man das oberste und das unterste ab, so bleiben in der Mitte zwei übrig, von

denen das eine von dem unteren Spalt und der rechten Objektivhälfte, das andere von dem oberen Spalt und der linken Objektivhälfte herrührt. Man hat nun offenbar nur nötig, einen bestimmten Bruchteil der Fläche der einen oder anderen Objektivblendenhälfte abzudecken, um die Intensität des einen oder anderen Spektrums um denselben Bruchteil zu vermindern, vorausgesetzt, daß die Helligkeit in der quadratischen Objektivblendenöffnung gleichmäßig verteilt ist. Bringt man vor einen Spalt, z. B. vor den oberen, ein Absorbens, und blendet man durch einen vertikalen Okularspalt aus den beiden Spektren Streifen aus, so wird der aus dem *unteren* Spektrum ausgeblendete der dunklere sein; es muß sich dann aber durch teilweises Abblenden der rechten Objektivblendenhälfte erreichen lassen, daß der obere ebenso dunkel wird, und das Verhältnis des ausgeblendeten Teils zur ganzen Blendenhälfte gibt dann die Durchlässigkeit des Absorbens an.

Hat man hinter der Objektivblende eine Blende, deren Öffnung gerade halb so breit ist, wie die quadratische Öffnung der Objektivblende, seitlich verschiebbar so angeordnet, daß sie in ihrer linken Endstellung das linke Prisma P_a , in ihrer rechten das rechte P_b gerade ganz frei läßt, so wird bei der Verschiebung dieser Blende von links nach rechts im Okularspalt die Helligkeit *oben* von Null bis zu einem Maximalwert h_b zunehmen, unten von dem Maximalwert $h_a = h_b$ (wenn kein Absorbens vorgeschaltet ist) bis zu Null abnehmen. Also werden auf einer hinter dem Okularspalt vorbeibewegten photographischen Platte zwei Schwärzungstreifen von abnehmender bzw. zunehmender Schwärzung entstehen. Fig. 3 stellt die Änderung der Belichtungsintensität für die beiden Streifen a und b als Funktion des Plattenweges dar. Die Gleichheitsstelle g liegt, wie man sieht, in der Mitte. Wird vor den oberen Spalt ein Absorbens gebracht, das seine Helligkeit auf $\frac{2}{3}$ herabsetzt, so ändert sich die maximale Belichtung h_a in $h'_a = \frac{2}{3} h_a$ (vgl. Fig. 3), und die Gleichheitsstelle verschiebt sich nach g' . Bezeichnen wir die Stellen, wo die Intensitäten verschwinden mit a_0 und b_0 , so läßt sich aus dem Quotienten $(a_0 - g)/(g' - b_0)$ natürlich die Durchlässigkeit des Absorbens berechnen.

Dieses photometrische Prinzip der verschiebbaren Blende ist

von H. Th. Simon 1898 angegeben und in Eders Jahrbuch beschrieben worden. Die äußere Konstruktion ist zum Teil aus den Abbildungen der Taf. VI¹⁾ zu ersehen. Die verschiebbare Blende (ich will sie kurz „Schiebblende“ oder, wo kein Mißverständnis möglich ist, einfach „Blende“ nennen) wird durch eine Mikrometerschraube mit Trommel T_m und Teilung bewegt und ist so eingerichtet, daß man ihre Öffnung für besondere Zwecke, z. B. Spektralaufnahmen) auf das Doppelte

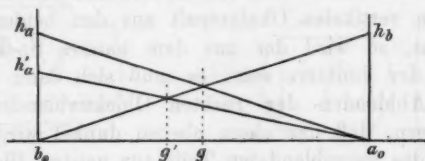


Fig. 3.

vergrößern, also gleich der quadratischen Objektivblendenöffnung machen kann. Die Kassette, welche die photographische Platte enthält, wird eingeschoben in einen horizontal verschiebbaren Rahmen S , den ich „Kassettenschieber“ oder auch kurz „Schieber“ nennen will. Die Führungsleisten des Kassettenschiebers sind an einem zweiten vertikal verschiebbaren Rahmen R angebracht, der sich seinerseits an einem dritten an dem Blechkasten K fest angeschraubten Rahmen R_1 führt. Die vertikale Verschiebbarkeit des Rahmens R , der in mehreren Höhen festgestellt werden kann, hat den Zweck, mehrere Paare von Schwärzungstreifen auf die Platte bringen zu können. Die seitliche Verschiebung des Kassettenschiebers geschieht durch eine flachgängige Stahlspindel $St^2)$ mit geteilter Mutter M , deren Lager am Rahmen R angebracht sind. Um proportionale Verschiebung von Blende und Kassettenschieber zu haben, müssen beide Bewegungsschrauben miteinander gekuppelt sein.

Die Stellung des Kassettenschiebers läßt sich an einer an

1) In dem schematischen Grundriß Abb. 3 der Taf. VI ist alles zum Verständnis nicht Wesentliche weggelassen.

2) Die Gänge sind in Abb. 3 der Tafel nur an einer Stelle angedeutet.

ihm befestigten Skala, die der Blende an der Schraubentrommel T_m ablesen.

Die Veränderlichkeit des Übersetzungsverhältnisses zwischen Schieber- und Blendenbewegung gestattete, die Länge der Schwärzungstreifen von einer Nullstelle zur anderen größer oder kleiner zu machen. Damit sollte die Genauigkeit je nach Bedürfnis erhöht oder (unter Zeitgewinn) erniedrigt werden können. Denn es entspricht bei der Aufsuchung der Gleichheitsstelle einer bestimmten Verschiebung der gefundenen Gleichheitsstelle \bar{g} gegen die wirkliche g ein desto größerer Fehler der gefundenen Durchlässigkeit D , je kleiner der Abstand der Nullstellen auf der Platte ist. Da aber das Schwärzungsgefälle der Streifen ebenfalls umgekehrt, also der Auswertungsfehler $g - \bar{g}$ direkt proportional diesem Abstand ist, so gewinnt man damit nichts, solange nicht die Anwertungsfehler so klein sind, daß sie von derselben Größenordnung wie die Fehler der Ablesung an der Skala werden. Man kann also Blenden- und Schieberbewegung in unveränderlichem Verhältnis kuppeln, und wie ich weiter unten zeigen werde, gewinnt man damit einen großen Vorteil.

2. Der Auswertungsapparat oder Helligkeitskomparator.

Zur Aufsuchung der Gleichheitsstelle auf der Platte dient eine besondere Einrichtung, die bei dem zweiten Simonschen Apparat unmittelbar mit dem Registrierapparat verbunden ist. Die Schiene N nämlich (s. Taf. VI), die mittels zweier eiserner Träger den Kasten K trägt und zur Einstellung der Wellenlänge um das Dispersionsprisma geschwenkt werden kann, ist über den Prismenisch hinaus nach Z (Abb. 1) verlängert und trägt auf dieser Verlängerung ein Fernrohr F , das mit seinem Objektiv dem Apparatobjektiv gerade gegenübersteht. Ist dieses Fernrohr auf ∞ eingestellt, so sieht man also darin, nachdem das Dispersionsprisma abgenommen ist, eine Partie einer vor dem Okularspalt befindlichen entwickelten Platte scharf, sofern diese in einer Kassette ohne Boden steckt und von außen beleuchtet wird. Wegen der auf das Objektiv aufgesprengten Prismen P_a und P_b (Fig. 2) aber sieht man die ganze Plattenpartie doppelt, und zwar befinden sich die beiden Bilder übereinander. Zur Auswertung bringt man an Stelle des Okular-

spaltes eine Doppelblende an, die in Fig. 4a vergrößert dargestellt ist. Die beiden halbkreisförmigen Öffnungen haben 5 mm Mittelpunktsabstand und blenden deshalb gerade Teile aus der Mitte der beiden Schwärzungstreifen aus. Durch die Verdoppelung des Bildes der Doppelblende wird erreicht, daß in der Bildebene des Fernrohres das Bild Fig. 4b entsteht,

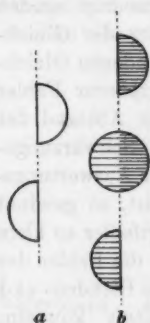


Fig. 4.

von dem aber der oberste und der unterste Teil für das Auge des Beobachters abgeblendet sind. Diese Einrichtung hat den Zweck, die zu vergleichenden Partien unmittelbar und ohne Trennungslinie nebeneinander zu bringen, um so die Unterschiedsschwelle des Auges voll auszunutzen. Man hat nun zur Aufsuchung der Gleichheitsstelle nur nötig, den Kassettenschieber mit der von hinten diffus beleuchteten Platte so lange hin und her zu schieben, bis man in dem Fernrohr die beiden Felder gleich hell erblickt. Dann liest man an der Skala des Schiebers den der Gleichheitsstelle entsprechenden Wert g ab, bringt hierauf den Anfang und das Ende der Schwärzungstreifen vor die halbkreisförmigen Öffnungen der Doppelblende und liest die zugehörigen Werte a und b an der Skala ab. Die Abstände der Gleichheitsstelle von den Streifenenden sind somit $a-g$ und $g-b$. Bei der Aufnahme hat man sich schon die Anfangsstellung α und die Endstellung β der Blende notiert. Ferner hat man die Nullstellungen der Blende α_0 und β_0 ein für allemal bestimmt. Aus allen diesen Größen ergibt sich das Verhältnis der von den Spalten ausgehenden Intensitäten, wie man sich leicht klar macht, zu

$$\bar{v} = \frac{\frac{\alpha - \beta_0}{\alpha - \bar{g}} \cdot \frac{a - b}{\alpha - \beta} - 1}{\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - \bar{g}} \cdot \frac{a - b}{\alpha - \beta} + 1}.$$

Der Faktor $(a-b)/(\alpha-\beta)$ stellt nichts anderes dar, als das Verhältnis der Schieberbewegung zur Blendenbewegung. Ist dieses Verhältnis *unveränderlich*, so wird $(a-b)/(\alpha-\beta)$ eine ein für allemal bestimmbare Konstante c , und der Ausdruck geht über in

$$\bar{v} = \frac{\frac{\alpha - \beta_0}{\alpha - \beta} c - 1}{\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - \beta} c + 1}.$$

Es wird dadurch also nicht nur die Rechnung erheblich vereinfacht, sondern auch die Ablesung und Aufschreibung des Wertes β bei der Aufnahme und des Wertes b bei der Auswertung erspart. Mit Rücksicht darauf wurde oben gesagt, daß die Veränderlichkeit des Verhältnisses $(\alpha - \beta)/(\alpha - b)$ nur nachteilig sei.

II. Die Mängel des Apparates und ihre Behebung.

1. Änderungen am Registrierapparat.

Die erste Störung, die sich bei der Prüfung des Apparates bemerkbar machte, bestand in einer trotz anscheinend gleichmäßiger Drehung der Spindel bestehenden *Ungleichförmigkeit* der Plattenbewegung, die sich darin äußerte, daß sich in den Schwärzungstreifen bald regelmäßig, bald unregelmäßig, hellere und dunklere Querstreifen zeigten. Da diese Streifenbildungen natürlich bei der Auswertung sehr stören mußten und zu Fehlern Anlaß geben konnten, mußte mit allen Mitteln ihre Beseitigung angestrebt werden. Alle zu diesem Zweck getroffenen Maßnahmen waren indessen so gut wie erfolglos. Es blieb also nichts anderes übrig, als auf die Konstruktion eines *Komparators* zu sinnen, der trotz der Streifenbildung eine zuverlässige Auswertung ermöglichen und womöglich gleichzeitig einige andere Mängel des vorhandenen Komparators vermeiden sollte, auf die ich sogleich zu sprechen kommen werde.

2. Der Helligkeitskomparator.

a) Schwächen des vorhandenen Komparators.

Der an dem Apparat vorgesehene Komparator hat folgende Fehler:

1. Die Trennungslinie zwischen den beiden zu vergleichenden Feldern ist praktisch nicht vollständig zum Verschwinden zu bringen. Durch diese Trennungslinie wird aber die Empfindlichkeit bedeutend herabgesetzt.

2. Da die zur Bilderzeugung verwendeten Strahlen von den beiden Blenden aus seitlich verschiedene Richtung haben,

weil sie durch die beiden Hälften des Apparatobjektivs gehen, muß man, um parallaktische Verschiebung zu vermeiden, d. h. wirklich senkrecht übereinander liegende Stellen der Schwärzungsstreifen zu vergleichen, die Platte *unmittelbar* hinter die Halbkreisblenden bringen. Auf diese aber muß man scharf einstellen, also erscheint auch das Korn und alle Unregelmäßigkeiten der Schicht scharf im Gesichtsfeld. Abgesehen davon, daß sich die Helligkeit einer gekörnten Fläche nicht so gut abschätzen läßt, wie die einer glatten, bringt dies einen großen Mißstand mit sich. Sieht man nämlich bei einer Einstellung auf Gleichheit zufällig eine Unregelmäßigkeit im Korn oder einen kleinen Plattenfehler im Gesichtsfeld, was sehr oft der Fall ist, so wird man die zweite Einstellung nicht mehr ohne Voreingenommenheit machen, sobald man dieselbe Stelle der Platte wieder ins Gesichtsfeld kommen sieht. Man wird vielmehr dazu neigen, die Helligkeit wieder für gleich zu halten, sobald die Stelle ins Gesichtsfeld kommt, oder wird, um diesen Fehler zu vermeiden, anders einstellen, auch wenn man unter anderen Umständen vielleicht dieselbe Einstellung gemacht hätte, wie das erste Mal. Hat man nun gar schon *zwei* Einstellungen gemacht, die wegen der Beeinflussung der zweiten durch die erste nahe beieinander liegen, so wird die *dritte* gewiß nicht weit davon liegen; es wird also der Fehler der ersten Einstellung in alle weiteren mit hineingetragen, und man weiß deshalb nicht, wie man den Mittelwert bilden soll.

3. Die zu vergleichenden Stellen werden aus den *Mitten* der Schwärzungsstreifen genommen, haben also auf der Platte einen Abstand von 5 mm. Ist die Empfindlichkeit der Platte nicht auf der ganzen Fläche konstant, oder wirkt die Entwicklung nicht an allen Stellen gleichmäßig, so wächst natürlich der Unterschied der Schwärzungen zweier gleich belichteter Stellen ungefähr proportional dem Abstände dieser Stellen, solange dieser klein ist. Daraus folgt, daß der Unterschied $g - g'$ zwischen der wirklichen und der gefundenen Gleichheitsstelle, also der Fehler der Auswertung, im allgemeinen um so größer wird, je weiter die auf der Platte ausgeblendeten Teile voneinander entfernt sind. Daß diese Vergrößerung des Fehlers wirklich merklich und sogar ziemlich deutlich sein kann, stellte ich fest, indem ich eine früher

gemachte Aufnahme, bei der die Streifenbildung durch sehr große Breite des Okularspaltes vermieden war, sechsmal nebeneinander unter denselben Umständen auf eine Platte kopierte. Wäre die Schwärzung der Platte nur von der Belichtung abhängig gewesen, so hätte die Gleichheitsstelle bei allen sechs Doppelstreifen in der nämlichen Entfernung vom Streifenanfang liegen müssen. In Wirklichkeit war dies natürlich nicht genau der Fall. Suchte man aber nun die sechs Gleichheitsstellen einerseits mit freiem Auge auf, wo man nur für die Helligkeitsunterschiede unmittelbar benachbarter Stellen empfindlich ist, also nur die Partien in der nächsten Nähe der Trennungslinie der Streifen berücksichtigt, und andererseits mit einem Komparator, der entweder die ganze Streifenbreite oder Teile aus der Mitte der Streifen zum Vergleich benutzt, so zeigte sich, daß die mit freiem Auge im Mittel gefundenen Gleichheitsstellen bezüglich ihrer Lage in den sechs Doppelstreifen viel besser miteinander übereinstimmten, als die mit dem Komparator erhaltenen, und daß einige von den mit dem Komparator gefundenen sogar relativ weitab lagen, an Stellen, wo man sie bei Abschätzung mit freiem Auge *niemals* vermutet hätte. Schon diese Beobachtung machte es wahrscheinlich, daß in diesen Fällen die Schwärzung auf einer senkrecht zum Streifen gedachten Linie nicht konstant sei. Durch Untersuchung mit dem Hartmannschen Mikrophotometer konnte ich diese Vermutung bestätigen und bei Beobachtung in der Nähe der Trennungslinie die mit freiem Auge gefundenen Gleichheitsstellen erhalten, während bei Vergleich der mittleren Streifenpartien ziemlich genau die mit dem Komparator erhaltenen resultierten.

Aus diesen Gründen versuchte ich noch eine Reihe anderer Möglichkeiten der Auswertung¹⁾, bis ich endlich zu dem im folgenden beschriebenen Komparator gelangte.

b) Die neue Form des Komparators.

Der Zweck, im Gesichtsfelde an Stelle der Vertikalstreifen eine *mittlere Helligkeit* zu bekommen, mußte sich durch

1) Vgl. darüber meine Dissertation: Über ein von H. Th. Simon angegebenes Spektralphotometer für Ultraviolett, Göttingen 1913.

Anwendung eines durchscheinenden Mediums wie Paraffin oder Milchglas erreichen lassen. Eine Kombination eines solchen mit dem an Empfindlichkeit unübertroffenen Lummer-Brodhunschen Photometerwürfel stellt der neue Komparator dar.

An die untere Schiene *N* des Apparates, die den Kasten *K* trägt (vgl. die Abb. 2 der Taf. VI), ist ein sehr starrer Träger *T*₁ aus Rotguß angeschraubt, der an seinem vorderen Ende bei *s* ein Scharnier hat, durch das ein zweiter ebenfalls sehr starrer Teil *T*₂ drehbar an ihm befestigt ist. Der Stift des Scharniers läßt sich herausziehen, so daß der obere Teil abgenommen werden kann. Auf die obere Fläche dieses Teiles ist ein starkes Blech aufgeschraubt, das in zwei aufgebogenen Lappen Spitzenschrauben trägt, zwischen denen ein zweites starkes Blech *B* um eine in seiner Ebene liegende Achse drehbar ist. Dieses Blech liegt vorne auf einem einarmigen Hebel *H* nahe seinem bei *r* gelegenen Drehpunkt auf und wird durch zwei seitliche Schraubenfedern an ihn angedrückt; dieser Hebel wiederum ruht mit seinem hinteren Ende auf der Mikrometerschraube *m*, die also durch seine Vermittelung sehr kleine Drehungen des Bleches *B* und damit sehr geringe Hebungen und Senkungen seines vorderen Endes ermöglicht. Das vordere Ende nämlich trägt das eigentliche Photometer, das in Fig. 5a und b im Längs- und Querschnitt dargestellt ist. Zur Veranschaulichung der Größe ist die Länge eines Zentimeters im selben Maßstab mitgezeichnet. Die beiden kongruenten aus Silberblech gebogenen und innen polierten Stücke *S*₁ und *S*₂, zwischen denen eine ebenfalls, und zwar beiderseits, polierte Scheidewand *W* aus Silberblech von 0,1 mm Stärke eingeklemmt ist, werden von einem in der Figur weggelassenen rechteckigen Blechbügel mit einer kleinen Druckschraube zusammengehalten und bilden so einen kleinen vorne und hinten offenen Kasten. Unter „vorne“ sei die eben abgeschnittene Seite verstanden. Vorne wird dieses Kästchen durch zwei gleiche beiderseits matt geschliffene 0,5 mm starke Milchglasplättchen *M*₁ und *M*₂ geschlossen, die oberhalb und unterhalb der über die Stücke *S*₁ und *S*₂ vorragenden Scheidewand aufgekittet werden. Zwei weitere Milchglasplättchen von gleicher Dicke *M*₁' und *M*₂', die aber auf der Außenseite poliert sind, verschließen das Kästchen hinten. An diesen endlich

sind die an einer kleinen Stelle der Hypotenusenfläche mit etwas Kanadabalsam verbundenen gleichschenkelig-rechtwinkligen Glasprismen P_1 und P_2 befestigt.

Dieses Photometerkästchen ist am vorderen Rande des Bleches B so angebracht, daß seine Vorderfläche zur Plattenebene parallel ist und sein Abstand von einer in der Kassette

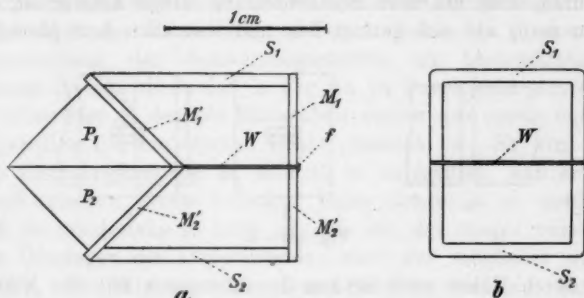


Fig. 5a und b.

befindlichen Platte 0,5—1 mm beträgt. In der Abb. 2 sieht man das Kästchen nicht unmittelbar an dem Blech B befestigt, sondern es ist noch eine Justiervorrichtung angebracht, mit der es um eine seine Vorderfläche halbierende horizontale Gerade als Achse gedreht werden kann. Ich habe diese nicht beschrieben, weil sie entbehrlich ist. Zum Schutz gegen seitlich oder von oben einfallendes von den Zimmerwänden reflektiertes Licht ist das Blech B mit einem kleinen seitlich und hinten geschlossenen innen geschwärzten Blechkasten überbaut, der oben an geeigneter Stelle eine gewöhnliche schwach vergrößernde Lupe zur Beobachtung des Photometerwürfels $P_1 P_2$ trägt.

Nachdem der Okularspalt des Apparates auf 1—2 mm Breite eingestellt ist (Fig. 6a) wird er durch eine Doppelblende (Fig. 6b) bis auf zwei schmale Rechtecke abgeblendet (Fig. 6c). Ist nun an Stelle des Apparatobjektivs eine Konvexlinse eingeschraubt, die auf den Okularspalt von innen her das vergrößerte reelle Bild eines Nernststiftes entwirft, so wird, wenn unmittelbar hinter der Doppelblende das beschriebene Photometerkästchen in richtiger Höhe angebracht ist, von dem durch

die obere Blendenöffnung tretenden Licht nur das obere, von dem durch die untere tretende nur das untere der beiden Milchglasplättchen M_1 und M_2 getroffen werden. Sind die beiden Lichtmengen gleich, so werden auch die Plättchen M_1 und M_2 gleich stark beleuchtet und der Fleck des Lummerwürfels P_1P_2 verschwindet. Sind sie nicht ganz gleich, z. B. dadurch, daß die eine Blendenöffnung etwas kleiner ist, so kann man, wie sich gezeigt hat, und was auch ganz plausibel

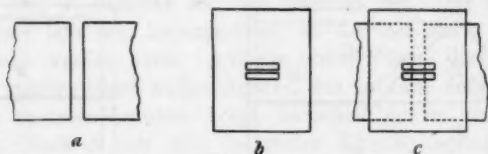


Fig. 6a—c.

ist, durch Heben oder Senken des Kästchens mit der Mikrometerschraube m (Abb. 2 der Tafel) den Fleck zum Verschwinden bringen. Bringt man nun eine Platte so zwischen Blende und Photometer, daß die Trennungslinie der Schwärzungsstreifen gerade in der Höhe des schmalen Steges der Doppelblende ist, wodurch der Fleck im allgemeinen wieder sichtbar wird, so braucht man nur durch seitliches Verschieben die Platte wieder auf sein Verschwinden einzustellen, um die Gleichheitsstelle vor der Doppelblende zu haben.

Bei den ersten derartigen Versuchen erhielt ich den Eindruck, als ob die Einstellung auf Verschwinden nicht nur von der *Gleichheit* der Schwärzung, sondern auch von ihrem Betrage abhinge. Diese Erscheinung rührt von der Zerstreuung des Lichtes durch die Silberteilchen der geschwärzten Schicht her, was mit Sicherheit dadurch nachgewiesen wurde, daß sie bei Vorschaltung eines klaren Rauchglases nicht auftrat. Natürlich kann die Zerstreuung des Lichtes keine Störung veranlassen, wenn keine Unsymmetrie in dem System vorliegt. Steht dagegen das Kästchen nicht genau in solcher Höhe, daß die Ebene der Scheidewand W (Fig. 5) mit der horizontalen Symmetrieebene der Doppelblende zusammenfällt, so ist klar, daß die Verteilung des Lichtes auf die Plättchen M_1 und M_2 bei ungehindertem Durchgang eine andere sein

muß, als bei Zerstreuung durch die Schicht. Da aber vor Vorschaltung der Platte zunächst durch Höhenverschiebung des Kästchens auf Verschwinden des Fleckes eingestellt wird, so wird die Bedingung, daß das Kästchen symmetrisch zur Blende stehen muß, im allgemeinen nicht erfüllt sein. Es mußte deshalb eine Vorkehrung getroffen werden, die die symmetrische Stellung des Kästchens garantiert, ohne deshalb die Möglichkeit der Einstellung auf Verschwinden des Fleckes vor Vorschaltung der Schwärzungstreifen zu beeinträchtigen. Diesem Zwecke dient der in Fig. 5a im Querschnitt sichtbare Metallstreifen f , der der Einfachheit halber aus einem auf $\frac{1}{3}$ abgefeilten 0,4 mm starken Draht gemacht ist. Er wird auf die Milchglasplättchen M_1 und M_2 so aufgekittet, daß er die Fuge zwischen ihnen bedeckt. Seine Breite ist so gewählt, daß sie mindestens so groß ist, wie die des Steges zwischen den Öffnungen der Doppelblende, aber nur möglichst wenig größer. Die Wirkungsweise dieses Streifens wird aus Fig. 7 klar, die die Plättchen und die Blende im Vertikalschnitt darstellt. Er bewirkt, daß durch eine *minimale* Hebung oder Senkung des Kästchens schon eine merkliche Verringerung der oben oder unten auftreffenden Lichtmenge erreicht wird. Daß dies wirklich zutrifft, geht daraus hervor, daß ich den Fleck, nachdem auf sein Verschwinden eingestellt war, schon deutlich sichtbar machen konnte durch eine Hebung oder Senkung von $10\ \mu$. Damit ist die Höheneinstellung des Kästchens auf symmetrische Lage zur Blende hinreichend gewährleistet. Man hat nur nötig, den Streifen f symmetrisch zur Fuge zwischen den Plättchen aufzukitten. Um dies hinreichend genau machen zu können, hat man als Kriterium *eben die Erreichung des damit verfolgten Zweckes an der Hand*, nämlich die Erreichung der Unabhängigkeit der Höheneinstellung auf Verschwinden des Fleckes von der Diffusität der Beleuchtung. Man bringt also den Streifen f provisorisch (mit Klebwachs) an und schaltet eine nur teilweise aber gleichmäßig geschwärzte Platte oder *besser eine teilweise mattierte Glasplatte* vor. Ist die Höheneinstellung auf Verschwinden des Fleckes unabhängig davon, ob man eine durchsichtige oder eine matte Stelle der Platte vor die Blende



Fig. 7.

bringt, so sitzt der Streifen richtig, anderenfalls verschiebt man ihn eben so lange, bis die Unabhängigkeit erreicht ist. Ist er aber einmal richtig angebracht, so ist ein für allemal durch die Höheneinstellung auf Verschwinden des Fleckes auch die Unabhängigkeit von der Diffusität der Beleuchtung gewährleistet. Diese Folgerung hat sich bei sehr vielen Nachprüfungen auch durchaus bestätigt, obgleich ich immer die partielle Mattscheibe dazu verwendete, die das Licht *viel stärker* zerstreute, als die Schwärzung einer Platte.

Die *Vorzüge* des eben beschriebenen Komparators vor dem ursprünglich am Apparat vorhandenen bestehen darin, daß er dessen oben aufgezählte Fehler sämtlich vermeidet:

1. Die Trennungslinie zwischen den zu vergleichenden Feldern verschwindet (wie *überhaupt* beim Lummer-Brodhunschen Photometerwürfel) vollständig. Die Einstellung ist deshalb so empfindlich, daß man sich fast immer mit einer einzigen begnügen kann.

2. Man kann, wo höchste Genauigkeit erwünscht ist, beliebig viele voneinander unabhängige Einstellungen machen. Vertikale Streifenbildungen in den Schwärzungstreifen stören durchaus nicht.

3. Die zum Vergleich herangezogenen Stellen der Schwärzungstreifen sind auf der Platte nur etwas mehr als 1 mm voneinander entfernt, und ihr Abstand könnte nach Bedarf sogar auf 0,8 mm reduziert werden, so daß die ungleichmäßige Empfindlichkeit der Platte fast keine Rolle mehr spielt.

4. Die zu vergleichenden Stellen werden seitlich durch den *nämlichen* Spalt begrenzt, mit dem die Aufnahme gemacht worden ist. Dadurch ist die Sicherheit gegeben, daß *genau zu gleicher Zeit belichtete* Stellen verglichen werden, so daß Unregelmäßigkeiten der Plattenbewegung, also Streifenbildungen, keinesfalls zu *Fehlern* Anlaß geben können.

5. Da die zu vergleichenden Stellen nur eine Breite von weniger als 1 mm in jedem Streifen haben, so kann man die Länge der Kollimatorspalte bei Verwendung dieses Komparators von je 5 mm auf je 1,5—2 mm reduzieren. Damit gewinnt man wieder zwei Vorteile: einmal nämlich kann man dann den Abstand der Spalte auch etwas verkleinern, so

daß die Länge der beiden Spalte mit Zwischenraum anstatt 15 mm nur etwa 7—8 mm beträgt, wodurch die Beleuchtung erleichtert wird; zum zweiten aber ist dann die Breite der beiden Schwärzungstreifen auf der Platte anstatt 10 mm nur 3—4 mm, so daß man auf eine Platte gut doppelt so viele Aufnahmen machen kann, was eine beträchtliche Platten- und Arbeitersparnis bedeutet.

6. Das Einstellen wird durch die Anwendung des Photometerwürfels außerordentlich *mühe*los, so daß man ohne große Anstrengung der Augen und dadurch hervorgerufene Beeinträchtigung der Empfindlichkeit lange Zeit ohne Unterbrechung auswerten kann. So habe ich mehrmals zwei Stunden lang ununterbrochen ausgewertet, ohne daß sich die Empfindlichkeit merklich verringert hätte, was bei dem ursprünglichen Komparator als ausgeschlossen gelten kann.

3. Die Beleuchtungseinrichtung.

Eine besondere Einrichtung zur gleichmäßigen Beleuchtung des Kollimatorspaltes war an dem mir zur Verfügung gestellten Apparat nicht vorgesehen. Bei seinem ersten Apparat hatte H. Th. Simon den Spalt bei Absorptionsmessungen mit *parallelem Licht* beleuchtet. Bei dem zweiten aber war dies wegen der veränderten Konstruktion der Lichtschwächungsvorrichtung nicht mehr möglich, wie ich sogleich zeigen werde. Wir müssen deshalb für die Beleuchtung des Kollimatorspaltes *folgende beiden Forderungen* aufstellen:

1. *Die von der Schieblende mit jedem der beiden durch die Objektivblendenhälften gehenden Strahlenbündel durchgelassene Lichtmenge muß proportional dem von ihr übrig gelassenen Querschnitt des Strahlenbündels sein und sich gleichmäßig auf das zugehörige Spaltbild verteilen.* Diese Forderung kann man auch so aussprechen: *Jedes Längenelement des Doppelspaltes muß sein Licht so nach der Objektivblende senden, daß die davon herrührende Helligkeit auf der ganzen Fläche der Objektivblendenöffnung oder zum mindesten auf jeder in dieser Fläche liegenden zur Richtung der Schieblendenbewegung parallelen Geraden konstant ist.*

2. *Die Intensität des vom Doppelspalt nach dem Objektiv gehenden Lichtes muß, wenn kein Absorbens vorgeschaltet ist,*

längs des ganzen Doppelspaltes konstant sein (darf aber zeitlich variieren).

Diese beiden Forderungen wären offenbar erfüllt, wenn der Spalt ein selbstleuchtender fester Körper von überall gleicher Helligkeit für alle Wellenlängen wäre. Sie wird also auch dann erfüllt, wenn man ein reelles Bild eines solchen Körpers auf dem Spalt entwirft. Leider scheint es aber einen solchen Körper von genügender Ausdehnung und genügend intensiver Strahlung bis ins Ultraviolett nicht zu geben. Bildet man aber eine *ungleichmäßig* helle Lichtquelle ab, so bleibt zwar die *erste* der beiden Forderungen erfüllt, die *zweite* aber ist es *nicht* mehr.

Man kann daran denken, eine Konvexlinse l' zu verwenden, die die sie von L aus treffenden Strahlen nach einer Linse l vereinigt, d. h. in der Ebene der Linse l ein reelles Bild der Lichtquelle entwirft. Man vermeidet damit auch die große Zerstreuung des Lichtes nach allen anderen Richtungen, als der gewünschten, und erzielt damit einen so großen Zuwachs an Intensität, daß man die Lichtquelle nun weiter von der statt der Mattscheibe eingeführten Linse l' entfernen kann, um eine hinreichend gleichmäßige Beleuchtung der

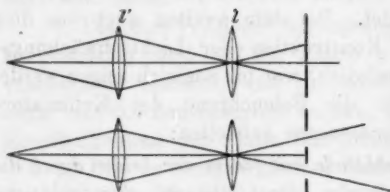


Fig. 8.

Linienfläche zu erreichen. Tut man dies, so ist das durch die Linse l von der Linse l' in der Spaltebene entworfene Bild wirklich gleichmäßig hell, d. h. die Forderung *zwei*, die uns noch fehlte, ist damit erfüllt. Es ist

aber klar, daß jetzt wieder die *erste* Forderung nicht mehr erfüllt ist. Nimmt man nämlich zunächst eine punktförmige Lichtquelle an, so ist aus Fig. 8, die den Fall in Grund- und Aufriß darstellt, leicht zu ersehen, daß dann in den Spalt nur Strahlen eintreten, die in einer die Achse enthaltenden Vertikalebene verlaufen. Diese Strahlen stellen ein ebenes Bündel dar, das sich im Grundriß als eine *Linie* projiziert, anstatt den ganzen Winkel zu erfüllen, unter dem die Kollimatorlinse vom Spalte

aus erscheint. Denkt man sich zu beiden Seiten des Lichtpunktes dicht nebeneinander noch andere Lichtpunkte, so wird allerdings jeder dieser Lichtpunkte ein ebenes Strahlenbüschel in den Spalt senden, und die Gesamtheit dieser Strahlenbüschel kann den Winkelraum erfüllen. Sind aber die Lichtpunkte von *verschiedener Intensität*, so sind die zugehörigen Strahlenbüschel verschieden dicht, es wird also der Winkelraum nicht *gleichmäßig* von den Strahlen erfüllt sein, wie es der Fall sein müßte, damit die erste Forderung erfüllt wäre. Demnach können wir diese Linsenanordnung nur dann brauchen, wenn wir eine flächenhafte Lichtquelle von überall gleicher Helligkeit haben, d. h. wenn wir das *schon haben*, durch dessen *Mangel* wir veranlaßt worden sind, die Anordnung zu treffen. Wenn wir diese Lichtquelle schon hätten, so würden wir sie direkt abbilden, also auf die eine Linse verzichten können.

Da nun aber, wie wir gesehen haben, die *erste* der beiden Forderungen erfüllt ist, wenn man die Lichtquelle *selbst*, die *zweite*, wenn man eine von ihr beleuchtete *Linse* auf dem Spalt abbildet, und da sich ferner die erste Forderung nur auf die Lichtverteilung in ihrer Projektion auf eine *Horizontalebene*, die zweite nur auf die Lichtverteilung in Projektion auf eine *Vertikalebene* bezieht, so muß es möglich sein, beide Forderungen zugleich zu erfüllen, wenn es gelingt, in Projektion auf eine Horizontalebene die *Lichtquelle*, in Projektion auf eine Vertikalebene eine von ihr beleuchtete *Linse* abzubilden. Diese Überlegung führte mich zu der Linsenanordnung, die in Fig. 9a und b im Grund- und Aufriß dargestellt ist. Von den Linsen I, II, III, IV sind I und III Kugellinsen, II und IV Zylinderlinsen mit horizontalen Zylinderachsen. In Vertikalprojektion¹⁾ betrachtet ist der Strahlengang angenähert so, als wenn die Zylinderlinsen nicht vorhanden wären: die Linsen I und III entwerfen in der Spaltebene ein reelles Bild der Lichtquelle, und es ist leicht zu ersehen, daß unsere

1) Unter Vertikalprojektion will ich immer eine senkrechte Projektion auf eine *horizontale* Ebene, also einen *Grundriß*, unter Horizontalprojektion eine senkrechte Projektion auf eine *vertikale* Ebene, also einen *Aufriß* verstehen.

Forderung *eins* erfüllt ist, wenn die Lichtquelle die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte seine Strahlen in einem gewissen Winkelraum *gleichmäßig* aussendet. In Horizontalprojektion betrachtet, entwerfen die Linsen I und II ein reelles Bild der Lichtquelle auf die Linse III und die Linsen III und IV entwerfen ein reelles Bild der Linse II auf die Spaltebene. Der Strahlengang ist für einen auf der Achse gelegenen Punkt der Lichtquelle *ausgezogen* für einen oberhalb der Achse

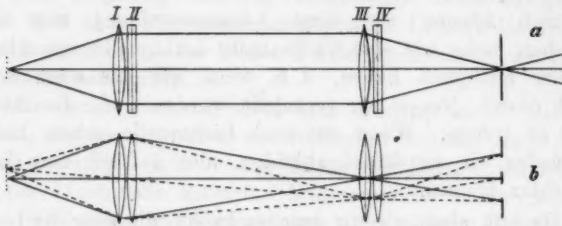


Fig. 9a u. b.

gelegenen punktiert gezeichnet. Die von den beiden *verschiedenen* Punkten der Lichtquelle ausgehenden Strahlen beleuchten, wie man sieht, *denselben* (den Doppelspalt enthaltenden) Teil der Spaltebene. Jedes Längenelement des Spaltes empfängt also sein Licht *gleichmäßig* von *allen überhaupt verwendeten* Oberflächenelementen der Lichtquelle, und jedes zur Beleuchtung herangezogene Oberflächenelement der Lichtquelle sendet sein Licht *gleichmäßig* nach *allen* Längenelementen des Doppelspaltes. Damit ist garantiert, daß jedes Längenelement des Spaltes gleichviel Licht bekommt, also auch aussendet, *auch dann*, wenn die einzelnen Oberflächenelemente der Lichtquelle *nicht* gleich hell sind. Es scheint so, als ob damit auch die *zweite* der aufgestellten Forderungen erfüllt wäre, doch zeigt sich bei näherem Zusehen, daß dies im allgemeinen *nicht* zutrifft. Es geht nämlich nicht alles Licht, das von dem Linsensystem nach dem Spalt gesandt wird, wirklich nach der Kollimatorlinse, sondern ein Teil davon trifft die Innenwände des Kollimatorrohres und kommt deshalb für die Aufnahme nicht in Betracht. In Fig. 10, in der die Linsen nur durch Linien angedeutet sind, ist der Verlauf je zweier von zwei

verschieden hellen Stellen der Lichtquelle ausgehender Strahlen in Horizontalprojektion (Aufriß) dargestellt. Die von dem oberen Punkt als den helleren ausgehenden Strahlen sind stärker gezeichnet. Man sieht an der Figur, daß zwar an den Punkten P_1 und P_2 der Spalte je ein starker und ein schwacher Strahl ankommt, daß aber vom oberen Spalt nur der schwache, vom unteren Spalt nur der starke Strahl die Richtung nach der Kollimatorlinse hat. Von der Kollimatorlinse aus erscheint also der untere Spalt heller als der obere, obwohl beide an

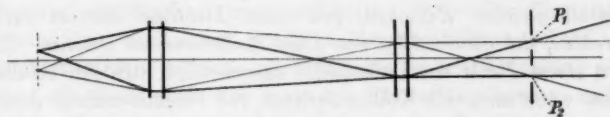


Fig. 10.

jedem einzelnen Längenelement die gleiche Lichtmenge erhalten. Unsere Forderung *zwei* verlangt aber, daß von jedem Spaltelement gleich viel Licht *durch die Objektivlinse* gehe. Um auch dies noch zu erreichen, wandte ich eine dritte Zylinderlinse unmittelbar vor dem Spalt an, die die von irgend einer horizontalen Linie der Linse III ausgehenden Strahlen in der Objektivblendenebene wieder zu einer horizontalen Linie ver-

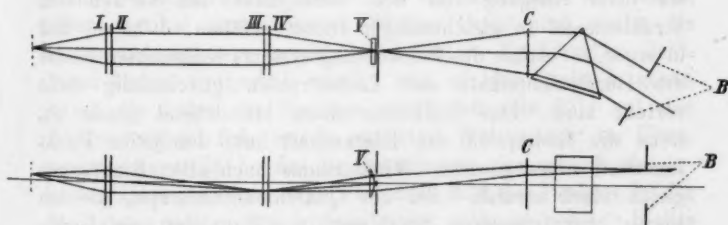


Fig. 11.

einigt. Fig. 11 stellt den Strahlengang für einen oberhalb der Achse gelegenen Lichtpunkt dar, der so gewählt ist, daß die in der Objektivblendenebene von ihm erzeugte Linie mit der oberen Kante der Objektivlinse zusammenfällt. Im Aufriß

ist der durch das Prisma gebogene Strahlengang der Übersichtlichkeit halber ausgestreckt. Die Brechung im Prisma in *vertikaler* Richtung ist wegen ihrer Kleinheit nicht berücksichtigt. Die Linsen sind mit Ausnahme der neu eingeführten Linse *V* nur durch Linien angedeutet. *C* ist die Kollimatorlinse, *B* die Objektivlinse.

Das Charakteristische der Linsenordnung läßt sich nach dem Gesagten so aussprechen: *Jeder verwendete Lichtpunkt der Lichtquelle erzeugt in der Blendenebene eine horizontale und somit zur Richtung der Blendenbewegung parallele Lichtlinie überall gleicher Helligkeit, und diese Lichtlinie entsteht durch Strahlen, die gleichmäßig von allen Spaltelementen kommen.* Die von einem Punkt der Lichtquelle ausgehenden Strahlen erfüllen also, wenn man sich Kollimatorlinse und Prisma entfernt denkt, hinter dem Spalt ein *langgezogenes Tetraeder* derart, daß von jedem Punkt der vertikalen mit dem *Spalt* zusammenfallenden Kante ein Strahl nach jedem Punkt der gegenüberliegenden horizontalen Kante geht. Die Umformung des von dem Lichtpunkt ausgehenden *Strahlenkegels* in dieses *Strahlentetraeder* ist die eigentliche Funktion des Linsensystems.

Vorbedingung dafür, daß in diesem Tetraeder die Strahlen von der vertikalen Kante in überall gleicher Dichte ausgehen und bei der horizontalen ebenso gleichmäßig verteilt eintreffen (d. h. daß die Forderungen zwei und eins erfüllt sind) ist, daß sie beim Ausgang von dem Lichtpunkt den verwendeten Strahlenkegel in gleichmäßiger Dichte erfüllen, d. h. so, daß in einer zur Achse des Beleuchtungssystems senkrechten Ebene die Durchstichpunkte der Lichtstrahlen gleichmäßig dicht verteilt sind. Das trifft nur dann hinreichend genau zu, wenn die Lichtquelle die Eigenschaft hat, daß jeder Punkt innerhalb eines gewissen Winkelraums nach allen Richtungen gleich stark strahlt. Bei der Quarzamalgalampe, die ich wegen ihrer intensiven Strahlung im Ultraviolett als Lichtquelle verwandte, ist diese Bedingung begreiflicherweise nicht erfüllt.

Da es viel zu kostspielig wäre, die fünf Linsen zu achromatisieren, ist es notwendig, die Stellung der Linsen I, II, III, IV und der Lichtquelle beim Übergang zu einer anderen Wellenlänge zu ändern. Ich habe deshalb die Brennweiten

der Linsen für $\lambda = 589$ bestimmt, daraus mit Hilfe des bekannten Brechungsindex des Quarzes für den ordentlichen Strahl die Brennweiten für andere Wellenlängen berechnet und dann für jedes Linsenpaar und die Lichtquelle je eine Skala gemacht, die die Stellung für verschiedene Wellenlängen angibt.

Um zu kontrollieren, ob der Strahlengang wirklich die beabsichtigte Form hat, verfuhr ich folgendermaßen: Ich brachte an die Stelle der Lichtquelle einen vertikalen Spalt, hinter dem ich eine nahezu monochromatische Lichtquelle (Natriumflamme, Quecksilberlampe) aufstellte. War die Einstellung richtig, so mußte der Spalt in der Spaltebene scharf abgebildet werden, während allerdings die scharfe Abbildung noch nicht die Richtigkeit der gesamten Einstellung bewies, da sie nichts über die gewünschte Wirkung der *Zylinderringen* aussagte. Um *diese* zu prüfen, stellte ich dann den statt der Lichtquelle angebrachten Spalt horizontal. Wenn alles in Ordnung war, mußte er dann in der Ebene der Linse III und in einer bestimmten Ebene hinter der Kollimatorlinse scharf abgebildet werden, während die Spaltebene gleichmäßig beleuchtet sein mußte. Beides traf zu.

Um zu kontrollieren, ob die Änderung der Einstellung mit der Wellenlänge richtig berechnet war, machte ich die erste der erwähnten Kontrollen auch im Ultraviolett, und zwar so: Ich brachte an die Stelle, wo die Lichtquelle sein sollte, einen vertikal ausgespannten dünnen Draht und stellte die Quarzamalgalampe unmittelbar dahinter. Nachdem im sichtbaren Gebiet festgestellt worden war, ob der Draht so genau durch die Achse des Systems ging, daß sein Bild auf den Kollimatorspalt fiel, wurde auf eine Wellenlänge im Ultraviolett eingestellt, bei der die Quarzlampe eine scharfe einigermaßen intensive Linie hat. Von dem Bild des Drahtes in der Spaltebene war natürlich dann nichts mehr zu sehen. Stellte man aber nun den Spalt etwas weiter, so mußte auf einen an Stelle des Okularspaltes angebrachten Fluoreszenzschirm die betreffende Linie mit dem Bild des Drahtes versehen, also von einer dunklen Linie durchzogen sein. Auch dies bestätigte sich.

III. Diskussion der Fehlerquellen und experimentelle Fehlerbestimmungen.

1. Die Fehler der Registrierung.

Eine Hauptfehlerquelle liegt in der *ungleichmäßigen Verteilung der Helligkeit in der Blendenebene*. Durch besondere Versuche stellte ich fest, daß meist am Rande die Helligkeit etwas größer war, als in der Mitte, und zwar war sie am linken Rande maximal um 8 Proz., im Mittel aus allen Probeaufnahmen um etwa 3 Proz., am rechten maximal um 3 Proz., im Mittel um 1 Proz. größer, als in der Mitte. Ferner fand ich zwischen den beiden Rändern im Mittel einen Unterschied von 2 Proz. Was die *Unsymmetrie* anlangt, so dachte ich zuerst an Absorption im Prisma, doch stimmte das Vorzeichen der Abweichung nicht zu dieser Annahme. Wahrscheinlich erklärt sich vielmehr die Unsymmetrie dadurch, daß möglicherweise die Beleuchtungslinsen und die Lichtquelle nicht genau in der Verlängerung des Kollimatorrohrs standen. Diese Linsen sind nämlich auf einer optischen Bank angebracht, die gesondert vom Apparat auf ein an den Tisch geklemmtes Brett geschraubt war. Daher kam es durch Verziehen des Brettes öfters vor, daß ich Höhen- und Seiteneinstellung der Linsen nachjustieren mußte. Wie dem aber auch sein möge jedenfalls ist durch diese Aufnahmen bewiesen, daß zwischen den beiden Rändern oder zwischen der Mitte und den Rändern Helligkeitsunterschiede von mehreren Prozenten vorkommen können, und es ist deshalb notwendig, sich klar zu machen, was für Fehler dadurch maximal in den *Meßresultaten* hervorgerufen werden.

Dies geschieht am einfachsten so: Man legt eine bestimmte Helligkeitsverteilung in der quadratischen Blende zugrunde und denkt sie sich dann ersetzt durch eine gleichmäßige Helligkeit in einer Blende, deren oberer Rand im Vergleich zu der quadratischen an jeder Stelle so weit hinauf- oder heruntergerückt ist, daß die Summe des durch jeden vertikalen Elementarstreifen der Blende gehenden Lichtes gleich dem bei der zugrunde gelegten Verteilung durch den *entsprechenden* Streifen der quadratischen Blende gehenden ist. Oder mit

anderen Worten: man bildet für jede vertikale Linie in der quadratischen Blende die mittlere Helligkeit, also

$$\frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} i \, dh,$$

wo i die Helligkeit, h_0 die Blendenhöhe ist, und trägt die mittleren Helligkeiten als Funktion des Abstandes von der Mitte auf. Über dem so erhaltenen zweiteiligen Flächenstück denkt man sich dann die Schiebblende so lange verschoben, bis das Verhältnis der ausgeblendeten Flächenteile der Durchlässigkeit D entspricht, wobei das Verhältnis der Abszissen der Schiebblendenränder die *gefundene* Durchlässigkeit \bar{D} darstellt.

Das Resultat dieser Überlegung will ich für die drei wichtigsten möglichen Fälle der Helligkeitsverteilung anführen:

1. Die Helligkeit soll von dem einen nach dem anderen Rande hin linear zu- oder abnehmen.

Ich will dabei zur Sicherheit eine Änderung von 10 Proz. von der Mitte nach einem Rande, also eine Differenz von 20 Proz. zwischen den beiden Rändern annehmen. Würden wir in diesem Falle das Absorbens nur vor den *einen* Spalt bringen, so würde die gefundene Durchlässigkeit \bar{D} mit einem Fehler von 5 Proz. behaftet sein. Da wir aber *immer* kommutieren, d. h. das Absorbens hintereinander vor dem oberen *und* vor den unteren Spalt zu bringen, und dann aus den gefundenen Werten \bar{D}_o und \bar{D}_u das Mittel

$$\bar{D}_m = \frac{\bar{D}_o + \bar{D}_u}{2}$$

bilden, so wird der Fehler viel kleiner. Es zeigt sich, daß der prozentuale Fehler von \bar{D}_m selbst eine Funktion der Durchlässigkeit D (also auch der *gefundenen* Durchlässigkeit \bar{D}_m ist). Am *größten* wird er für $D = 1$, d. h. wenn *keine* Absorptions- oder Reflexionsverluste stattfinden. In diesem Falle sind nämlich offenbar \bar{D}_o und \bar{D}_u zwei reziproke Werte, die sich beide (bei der angenommenen Helligkeitsverteilung) um etwa 5 Proz. von 1 unterscheiden; es sind die Werte 1,0513 und 0,9512. Das arithmetische Mittel

$$\bar{D}_m = \frac{1,0513 + 0,9512}{2} = 1,00125$$

unterscheidet sich, wie man sieht, um weniger als 0,2 Proz. vom richtigen Werte $D = 1$. Bei kleinerem Absorptionsverhältnis wird aber der Fehler von \bar{D}_m noch kleiner; z. B. ist er für $D = 0,5$ nur 0,1 Proz., für $D = 0,01$ nur 0,002 Proz. Man sieht daraus, daß lineare Zunahme der Helligkeit, selbst wenn sie in starkem Maße vorhanden sein sollte, ganz unbedenklich ist.

2. Die Helligkeit soll von der Mitte nach den Rändern zu oder abnehmen. Da dies natürlich nicht linear erfolgen kann, weil sonst die Helligkeitsänderung in der Mitte unstetig sein müßte, so ist die einfachste Annahme die, daß die Helligkeitsänderung nach einer *Parabel* erfolgt. In diesem Falle werden die entstehenden Fehler natürlich viel größer, weil sie wegen der Symmetrie nicht durch die Kommutierung verringert werden. Nehmen wir wieder zur Sicherheit eine Zunahme von 10 Proz. von der Mitte nach dem Rande an, so wird der *relative* Fehler von \bar{D} ($= \bar{D}_m = \bar{D}_0 = \bar{D}_w$) maximal 3,33 Proz.¹⁾ Diesen Wert hat er für *sehr kleine* D . Mit wachsender Durchlässigkeit wird der relative Fehler von \bar{D} immer kleiner und für $D = 1$ wird er natürlich zu Null. Der *absolute* Fehler von \bar{D} oder, was dasselbe ist, der Fehler der gefundenen durchgelassenen Lichtmenge, in Prozenten der *auffallenden* Lichtmenge ausgedrückt, wird natürlich nicht nur für Werte von D , die nahe = 1, sondern auch für solche, die nahezu = Null sind, *sehr klein*. Dieser hat sein Maximum etwa bei $D = 0,45$ und wird dort 0,6 Proz.

Da es sich meistens um die Bestimmung von Absorptionskonstanten handelt, braucht der große relative Fehler von 3,33 Proz. bei sehr kleinem D nicht sonderlich zu beunruhigen. Denn der Fehler, der aus einem so fehlerhaften \bar{D} berechneten Absorptionskonstanten \bar{k} kann sehr viel kleiner sein. Es ist nämlich

$$\bar{k} = -\frac{\ln \bar{A}}{d},$$

1) Daß er nicht größer wird als $\frac{10}{3}$ Proz., beruht natürlich darauf, daß für eine gegebene Parabel $y = cx^2$

$$\int_0^x y \, dx = \int_0^x cx^2 \, dx = \frac{cx^3}{3} = x \cdot \frac{y}{3}$$

wird.

wo A das der Durchlässigkeit D für ein bestimmtes Material *proportionale*, also mit demselben relativen Fehler behaftete *Absorptionsverhältnis*, d die Schichtdicke ist. Es wird dann

$$\frac{dk}{dA} = -\frac{1}{A \cdot d},$$

d. h. für 1 cm Schichtdicke wird die *absolute* Änderung der Absorptionskonstante $-1/A$ mal so groß, wie die zugehörige absolute Änderung von A . Hat A irgend einen Wert 10^{-e} , wo also e eine positive Größe sein muß, so hat z. B. ein Fehler von 1 Proz. davon den absoluten Wert 10^{-e-2} . Da aber nach der früheren Gleichung der zugehörige Fehler von k $-1/A$ mal so groß ist, ist sein absoluter Wert

$$-\frac{10^{-e-2}}{10^{-e}} = -10^{-2} = -0,01.$$

Mit anderen Worten: Wenn der Fehler von A 1 Proz. des Wertes von A beträgt, hat der Fehler von $\ln A$ den absoluten Wert $-0,01$. Der *relative* Fehler des Logarithmus und damit der Absorptionskonstante kann also sehr klein sein, wenn nämlich $\ln A$ selbst groß ist. Gerade für *kleine* Werte von A , bei denen bei der oben angenommenen Helligkeitsverteilung der relative Fehler von A nahezu 3,3 Proz. wird, ist aber $\ln A$ (negativ) ziemlich groß.

Der relative Fehler der Absorptionskonstante ist also weit entfernt, auch nur *ungefähr* proportional dem relativen oder dem absoluten Fehler von A oder von D zu sein. Das Diagramm (Fig. 12), das die Größen der drei Fehler unter der Annahme einer Helligkeitsänderung von 10 Proz. von der Mitte nach dem Rande als Funktion von A darstellt, macht dies anschaulich. Die gestrichelte Linie stellt den absoluten Fehler von D in Hundertsteilen oder, was dasselbe ist, den Fehler der durchgelassenen Lichtmengen in Prozenten der auffallenden dar. Die strichpunktierte Linie bedeutet den prozentischen Fehler von D oder A , die ausgezogene den prozentualen Fehler von k . Man sieht, daß sich dieser bei der angenommenen Helligkeitsverteilung fast für alle A über 1 Proz. halten würde. Doch ist zu bedenken, daß die angenommene Helligkeitsänderung nach den Rändern hin größer ist, als die auf der ungünstigeren Seite *maximal* beobachtete und dreimal so groß

als die dort im *Mittel* beobachtete. Würde man diese einsetzen, so würden sich alle Fehler, auch die relativen Fehler

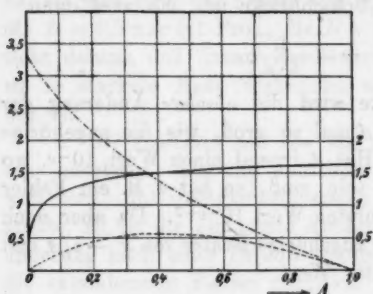


Fig. 12.

von k auf $\frac{1}{3}$ erniedrigen. Das Maximum würde dann anstatt 1,6 Proz. nur 0,5 Proz. sein. Ferner zeigt das Diagramm, daß man, wenn sonst überhaupt keine Fehler in den Messungen wären, die genauesten Werte der Absorptionskonstanten erhielte für $A < 0,01$. In Wirklichkeit trifft

dies natürlich nicht zu, wie wir weiter unten sehen werden.

3. Die Helligkeit soll von einem zum anderen Rande nach einer Exponentialkurve abnehmen. Dieser Fall ist wichtig wegen der Möglichkeit, daß bei sehr kurzen Wellenlängen merkliche Absorption im Prisma auftritt. Beträgt der Unterschied der Helligkeiten an den Rändern wieder 20 Proz., so weicht die Exponentialkurve, wie man sich überzeugen kann, so außerordentlich wenig von einer Geraden ab, daß man fast genau den Fall 1 hat, wo, wie wir gesehen haben, die Fehler der Mittelwerte verschwindend werden. Hat man stärkere Absorption, so kann der Fehler natürlich in Betracht kommen, doch bleibt er im Mittelwert ziemlich erträglich. Z. B. habe ich für den Fall, daß die Helligkeit an einem Rande nur *halb* so groß ist, wie am anderen, auf graphischem Wege gefunden, daß der absolute Fehler, von D für $D = 1$ in den Einzelwerten zwar 0,17 und 0,19, im Mittelwert aber doch nur 0,016, also 1,6 Proz., für $D = 0,09$ ebenso 0,014 und 0,018, im Mittel 0,0025 oder 2,7 Proz. wird. Es gibt also auch die Möglichkeit der Absorption im Prisma nicht zu ernstlichen Bedenken Anlaß, und dies um so weniger, als man sie an der starken Abweichung der Einzelwerte unter allen Umständen *bemerkt* und dann die Fehler durch Rechnung sehr reduzieren kann.

Andere Helligkeitsverteilungen in der Blende, als die der drei behandelten Fälle, müssen als *außerordentlich unwahr-*

scheinlich bezeichnet werden, wenn man bedenkt, daß die Ungleichmäßigkeiten der Beleuchtung von der ungleichen Strahlung der Lichtquelle nach verschiedenen Richtungen herrühren, daß aber die Öffnung des ganzen benutzten Lichtkegels in seitlicher Richtung nur 3,5 Grad beträgt. Würde man mehrmaliges Zu- und Abnehmen der Helligkeit über die Blendenbreite annehmen, so müßte die Intensität der Strahlung der Lichtquelle innerhalb eines Kegels von 3,5 Grad Öffnung mehrmals zu- und abnehmen. Dies könnte nur in ganz geringem Maße der Fall sein, und dann würde es nicht stören.

Was die ungleichmäßige Verteilung des Lichtes auf die beiden Spaltteile anlangt, so wirkt diese offenbar so, als wenn sich in der Blende die Helligkeit beim Übergang von der einen zur anderen Hälfte sprunghaft änderte, innerhalb der einzelnen Blendenhälften aber konstant bliebe. Man sieht leicht ein, daß sich die Fehler im Mittelwert dann zum größten Teile herausheben. Der richtige Wert von D würde nämlich in diesem Falle immer das *geometrische* Mittel der gefundenen Werte sein, was in dem oben behandelten Fall 1 nur für $D = 1$ genau der Fall ist. Nimmt man das *arithmetische* Mittel, so macht man einen gewissen Fehler. Eine Rechnung, die ich hier nicht durchführen will, zeigt, daß er den für alle Werte von D gleichen relativen Betrag

$$\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} - 1\right) D$$

hat, wenn die Helligkeit an einem Spalt ξ mal so groß ist, wie am anderen. Für $\xi = 0,9$ (10 Proz. Unterschied) ergibt sich der Fehler des Mittelwertes \bar{D}_m also zu

$$D \left(\frac{0,9}{2} + \frac{1}{1,8} - 1 \right) = 0,00555 \dots D = \frac{5}{9} \% \text{ von } D.$$

Wäre der Fehler beträchtlicher, so wäre es geratener, anstatt des *arithmetischen* Mittels der Werte \bar{D}_o und \bar{D}_u immer das *geometrische* zu nehmen, so aber wiegt der geringe Vorteil die größere Mühe nicht auf.

2. Die Fehler der Platten und der Entwicklung.

Durch die ungleichmäßige Empfindlichkeit der Platten an verschiedenen Stellen und die ungleichmäßige Einwirkung des

Entwicklers kommen ebenfalls Fehler in das Verfahren herein, deren Größe indessen nur rein empirisch bestimmt werden kann. Ich *kopierte* zu diesem Zweck eine ohne Absorbens gemachte Aufnahme oftmals unter denselben Umständen auf mehrere Platten und erhielt dadurch Kopien, die genau wie die Aufnahme selbst aussahen. Diese Kopien mußten sich aber offenbar verhalten, wie Aufnahmen, die unter gleichen Bedingungen mit einem *idealen* Apparate gemacht würden, bei dem keinerlei Änderungen der Beleuchtung möglich sind. War also die Gleichheitsstelle nicht in allen Kopien gleich weit von den Enden entfernt, so konnte die Abweichung nur an der Platte und an der Entwicklung liegen. Da diese Kopien außerdem bei gleicher Entwicklung ungefähr ebenso kontrastreich waren, wie die Aufnahmen mit dem Apparat, so konnte man sogar annehmen, daß die Zu- bzw. Abnahme der Belichtungsstärke der Schwärzungstreifen bei ihnen *ungefähr* dieselbe war, wie bei Aufnahmen, wo man sie leicht berechnen kann. Man hatte also die Möglichkeit, aus den Verschiebungen der in den einzelnen Kopien gefundenen Gleichheitsstellen gegen ihre mittlere Lage auf die Meßfehler zu schließen, die die betreffende Platte bei Benutzung zu Aufnahmen verursacht hätte.

Es ergaben sich dabei bei sechs Platten mit je vier Aufnahmen die mittleren Abweichungen der Gleichheitsstellen zu 0,44 mm, 0,31 mm, 0,41 mm, 0,26 mm, 0,13 mm und 0,11 mm; die entsprechenden Fehler der daraus bestimmten D wären entsprechend 0,015, 0,010, 0,014, 0,009, 0,004, 0,004, die relativen Fehler 1,5 Proz., 1,0 Proz., 1,4 Proz., 0,9 Proz., 0,43 Proz., 0,36 Proz. Die beiden ersten Platten sind nur mit wenigen, die dritte bis sechste dagegen mit mehreren Einstellungen ausgewertet. Auf diese ist demnach mehr Gewicht zu legen. Sie unterscheiden sich aber, wie man sieht, in ihren Fehlern sehr stark. Faßt man ihre Aufnahmen zusammen, so findet man einen mittleren Fehler von $\frac{3}{4}$ Proz.

Diese Angaben sollen natürlich nur einen ungefähren Begriff von der Größe der durch die Plattenfehler bedingten Meßfehler ergeben. Diese genauer zu bestimmen, hatte ich um so weniger Anlaß, als G. Leimbach¹⁾ in jüngster Zeit ge-

1) G. Leimbach, Zeitschr. f. wiss. Phot., noch nicht erschienen.

zeigt hat, daß die Ungleichmäßigkeiten der Schwärzungen gleichmäßig belichteter Platten hauptsächlich auf die *Entwicklung* zurückzuführen sind und bei geeigneter Entwicklung auf ganz kleine Beträge reduziert werden können. Es mag auch sein, daß sich Platten ausfindig machen lassen, die an sich schon gleichmäßiger arbeiten, als die von mir verwendeten photomechanischen Platten von Unger & Hoffmann. Ich benutzte diese Platte, weil sie sehr kontrastreich arbeitet, ohne doch allzu unempfindlich zu sein. Der Entwickler wurde zum Gebrauch jedesmal aus den beiden folgenden Lösungen zu gleichen Teilen gemischt:

I.

10 g Hydrochinon,
60 g Natriumsulfit,
4 g Zitronensäure,
2,5 g Bromkali,
550 g Wasser,

II.

10 g Ätznatron,
550 g Wasser.

3. Die Fehler der Auswertung.

Prinzipielle Fehler sind bei dem von mir verwendeten Komparator, soviel ich sehe, nicht vorhanden. Es kann sich also nur um die *zufälligen* Fehler der Auswertung handeln, die auf die unvollkommene Empfindlichkeit des Komparators zurückzuführen sind. Diese Fehler setzen sich aus zwei Teilen zusammen. Zunächst stellt man nämlich unter Vorschaltung einer glasklaren Stelle der Platte durch Höhenverschiebung des Photometers auf Verschwinden des Flecks ein und macht dabei einen Fehler. Dann stellt man durch Verschieben der Platte abermals auf Verschwinden des Flecks ein und macht wieder einen Fehler. Diese beiden Fehler f_1 und f_2 können sich addieren oder subtrahieren, also entsteht durch ihre Zusammenwirkung ein Fehler von dem Betrage $f' = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$. Es ist aber einleuchtend, daß f_1 und f_2 im Mittel von derselben Größe sein müssen, wenn man sie nämlich beide in Verschiebung der gefundenen Gleichheitsstellen g gegen die wirkliche g ausdrückt. Demnach ist es nur nötig, f_2 experimentell zu bestimmen, da ja nach dem eben Gesagten

$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{2f_2^2} = f_2 \sqrt{2}$ ist, wo f natürlich immer den mittleren Fehler bedeutet.

Es ist klar, daß beide Fehler f_1 und f_2 durch den Abstand der gefundenen Gleichheitsstellen von der wirklichen ausgedrückt, *umgekehrt proportional der Härte* der Aufnahme sind, wenn man diese durch die Größe des Schwärzungsgefälles in den Streifen an der Gleichheitsstelle definiert, daß es also von großer Wichtigkeit ist, die Aufnahmen so kontrastreich wie möglich zu machen.

Der Fehler f_1 fällt übrigens in den meisten Fällen heraus oder kann wenigstens immer ohne Mühe kompensiert werden. Macht man nämlich die Einstellung auf Verschwinden des Flecks durch *Höhenverschiebung falsch*, so werden alle nachher gemachten Einstellungen durch Verschiebung der Platte im nämlichen Sinne beeinflusst, d. h. alle Gleichheitsstellen werden z. B. zu weit rechts gefunden, wenn sich die Beleuchtung inzwischen nicht ändert. Nun macht man aber, wie schon mehrfach erwähnt, immer mindestens *zwei* Aufnahmen, bei deren einer das Absorbens vor dem oberen, bei deren anderer es vor dem unteren Spalt ist. Wertet man diese Aufnahmen mit *derselben* falschen Höheneinstellung des Photometers aus, so erhält man den einen Wert D_1 zu groß, den anderen D_2 zu klein, und das arithmetische Mittel $\frac{D_1 + D_2}{2}$ ist dann nur mehr mit einem Fehler behaftet, der gegen f_1 von höherer Ordnung ist. Macht man die zusammengehörigen Streifenpaare so, daß das eine auf der Platte in die Verlängerung des anderen zu liegen kommt, was immer möglich ist, wenn $D < 0,9$ ist, so ist es nicht einmal mühsamer, die aufeinander folgenden Einstellungen abwechselnd an dem einen und dem anderen Streifenpaar zu machen, und dann fällt f_1 jedenfalls heraus, auch wenn die Beleuchtung allmählichen Änderungen unterworfen sein sollte, was gelegentlich durch allmähliche Verbiegung des Nernststiftes vorkommen kann. Bei *diesem* Verfahren der Auswertung ist es überhaupt nicht nötig, die Einstellung durch Höhenverstellung besonders sorgfältig zu machen.

Mit abnehmendem Schwächungsverhältnis, also mit abnehmender Durchlässigkeit des Absorbens scheinen die Aus-

wertungsfehler, in Verschiebung der Gleichheitsstellen ausgedrückt, abzunehmen, ebenso als absolute Fehler von \bar{D} ausgedrückt. Die *relativen* Fehler von \bar{D} aber, soweit sie durch die Auswertung bedingt sind, nehmen natürlich zu. Die folgende Tabelle, die die an fünf Aufnahmen aus je 10—20 Einstellungen gefundenen Auswertungsfehler gibt, zeigt dies. Die Aufnahmen waren ziemlich wahllos herausgegriffen. Aufnahme 92,3 war eine ausgesprochen flauere Aufnahme, 132,3 eine besonders kontrastreiche, die übrigen waren normale. Man sieht, daß die mit einer Einstellung gefundene Gleichheitsstelle im Mittel bis auf etwa 0,1 mm mit der wirklichen zusammenfällt, wenn man nämlich berücksichtigt, daß f_1 normalerweise herausfällt. Die Fehler würden sich wahrscheinlich noch weiter herabsetzen lassen, wenn man die Beleuchtung bei der Auswertung etwas intensiver machen könnte, was bei meinem Apparat leider nicht möglich ist, aber durch Umkonstruktion leicht zu erreichen wäre (vgl. Abschnitt V).

Plattennummer	D	Mittlerer Fehler einer Einstellung		
		in Verschiebung mm	in \bar{D}	in % von D
92,3	1,0	0,206	0,007	0,70
184,2	0,82	0,121	0,0032	0,39
138,3	0,76	0,073	0,00187	0,27
132,3	0,22	0,058	0,00069	0,32
189,3	0,05	0,083	0,00075	1,5

4. Gesamtfehler.

Um die Meßfehler auch in ihrer *Gesamtheit* zu prüfen, bestimmte ich für eine Wellenlänge die Durchlässigkeit von sechs gleichen, bei Zeiss angefertigten 0,4 mm starken, geschliffenen Rauchglasplättchen, die an der betreffenden Stelle des Spektrums 0,767 von dem auffallenden Licht durchließen. Und zwar bestimmte ich in drei an verschiedenen Tagen gemachten, also ganz unabhängigen Meßreihen, die Durchlässigkeit jedes einzelnen Plättchens dreimal. Aus den Abweichungen der einzelnen Werte von den Mittelwerten, fand ich den mittleren Fehler der einzelnen Messung im Mittel zu $\pm 0,0087$ also den

mittleren relativen Fehler, da die Durchlässigkeit ungefähr 0,77 war zu $\frac{0,0037}{0,77} = 0,0048$ oder $\frac{1}{2}$ Proz. Doch ist dabei zu bedenken, daß jede dieser Messungen durch zwei unmittelbar hintereinander gemachte Aufnahmepaare gewonnen worden ist. Wäre jeder Wert nur durch *ein* Aufnahmepaar gewonnen worden, wie es normalerweise der Fall sein wird, so wäre also der mittlere Fehler einer Messung $\sqrt{2}$ mal so groß geworden, folglich

$$\pm 0,0037 \cdot \sqrt{2} = \pm 0,0052 \text{ oder } 0,48\sqrt{2} \text{ Proz.} = 0,68 \text{ Proz.}$$

In Wirklichkeit wäre allerdings für $\sqrt{2}$ ein kleinerer Wert einzusetzen. Da nämlich die zwei Aufnahmenpaare immer *unmittelbar hintereinander* gemacht worden sind, so sind dadurch zwar die von den Platten und der Entwicklung herrührenden Fehler, nicht aber die durch die Ungleichmäßigkeit der Beleuchtung verursachten verringert worden, da diese sich während der kurzen Zeit kaum verändert haben kann. Der gefundene mittlere Fehler von 0,68 Proz. ist also jedenfalls eher zu groß.

Da ich bei meinen Untersuchungen den Eindruck gewonnen habe, daß bei der beschriebenen Meßmethode zwar nicht der

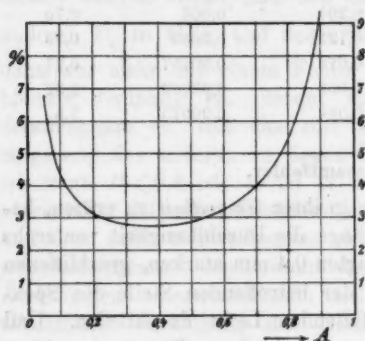


Fig. 13.

sieht, daß die Funktion etwa bei 0,35 (genauer bei $1/e = 0,368$) ein Minimum hat. Man wird also die genauesten Absorptionskonstanten erhalten, wenn man die Schichtdicke so wählt, daß

relative, aber der absolute Fehler von D (oder A) ungefähr konstant, oder besser gesagt, von D unabhängig ist, so habe ich in dem Diagramm Fig. 13 die zu einem konstanten Fehler von A von dem Betrage 0,01 gehörigen relativen Fehler der Absorptionskonstante k in Prozent als Funktion von A aufgetragen. Man

das Absorptionsverhältnis zwischen 0,3 und 0,4 liegt. Sehr beträchtliche Fehler der Absorptionskonstanten aber hat man zu erwarten, wenn A außerhalb des Intervalls 0,2—0,6 liegt.

Als weitere Probe für die Zuverlässigkeit des Verfahrens maß ich die Durchlässigkeit von zwei, drei, vier usw. von den Plättchen, die sich andererseits aus den Mittelwerten, für die Durchlässigkeit der einzelnen mußte berechnen lassen, da die Durchlässigkeit mehrerer Plättchen (sehr nahe) gleich dem Produkte der Durchlässigkeiten der einzelnen ist.

Ich brachte zuerst Plättchen I, dann I und II, dann I, II und III usw. und in einer anderen Meßreihe zuerst VI, dann VI, V, dann VI, V und IV usw. vor den Spalt. Beide Meßreihen wurden zweimal ausgeführt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

1	2	3	4	5	6	7	8
Absor- bens	\bar{D}_1	\bar{D}_2	$\bar{D} = \frac{\bar{D}_1 + \bar{D}_2}{2}$	D_R	$D_R - \bar{D}$	Korrekt- tionen c	$\bar{D}_R + c - \bar{D}$
I	0,765	0,756	0,7605	0,763	+ 0,0025	0,0000	+ 0,0025
I, II	0,587	0,582	0,5845	0,5875	+ 0,0030	0,0031	+ 0,0061
I bis III	0,451	0,450	0,4505	0,4494	- 0,0011	0,0061	+ 0,0050
I „ IV	0,349	0,350	0,3495	0,3465	- 0,0030	0,0082	+ 0,0052
I „ V	0,275	0,268	0,2715	0,2658	- 0,0057	0,0092	+ 0,0035
I „ VI	0,215	0,212	0,2135	0,2043	- 0,0092	0,0105	+ 0,0013
VI	0,762	0,777	0,7695	0,768	- 0,0015	0,0000	- 0,0015
VI, V	0,592	0,584	0,588	0,5895	+ 0,0015	0,0031	+ 0,0016
VI bis IV	0,454	0,458	0,456	0,4545	- 0,0015	0,0061	+ 0,0046
VI „ III	0,354	0,353	0,3535	0,3477	- 0,0058	0,0082	+ 0,0024
VI „ II	0,277	0,274	0,2755	0,2677	- 0,0078	0,0092	+ 0,0014
VI „ I	0,219	0,215	0,217	0,2043	- 0,0127	0,0105	- 0,0022

\bar{D}_1 und \bar{D}_2 sind die gemessenen Durchlässigkeiten, \bar{D} das Mittel daraus. D_R sind die durch Multiplikation der Durchlässigkeiten der einzelnen Plättchen gefundenen Durchlässigkeiten der in Spalte 1 angegebenen Kombinationen. In Spalte 6 sind die Abweichungen der gemessenen \bar{D} von den so berechneten enthalten. Man sieht, daß diese mit anwachsender Anzahl der Plättchen immer stärker negativ werden. Dies rührt, wenigstens zum Teil, davon her, daß mit wachsender Anzahl

der Plättchen ein immer größerer Teil des durch Reflexion verloren gegangenen Lichtes durch zweite Reflexionen wiedergewonnen wird. Ich bestimmte deshalb den Brechungsindex der Plättchen für die betreffenden Wellenlängen und berechnete daraus die in Spalte 7 angegebenen Korrekturen c , um die sich die in Spalte 5 angegebenen Werte ändern, wenn man die zweiten und dritten Reflexionen noch berücksichtigt. Bringt man diese Korrekturen an, so erhält man die in Spalte 8 angegebenen Abweichungen der beobachteten Werte von den berechneten. Diese sind, wie man sieht, erheblich weniger von der Anzahl der Plättchen abhängig. Es fällt aber auf, daß diese Korrekturen zum größten Teil positiv sind, anstatt gleichmäßig positiv und negativ zu sein. Doch läßt sich dies damit erklären, daß nach Untersuchungen von Rayleigh und anderen die Reflexion nur bei *frisch polierten* Flächen den theoretischen Wert hat, dann aber bald stark abnimmt, woraus folgt, daß die berechneten Korrekturen, die alle den Faktor $(1-\eta)$ sogar im Quadrat enthalten, zu groß sind. Daß auch die Werte der Spalte 8 noch etwas dazu zu neigen scheinen, mit wachsender Plättchenanzahl algebraisch *kleiner* zu werden, deutet darauf hin, daß auch bei diesen Messungen, wie ich es anderweitig direkt festgestellt habe, die Helligkeit in der Objektivblende gegen die Ränder hin etwas zugenommen hat. Dies stimmt auch gut zu der früheren Bestimmung des mittleren Fehlers.

Um noch ein übriges zu tun, habe ich die sechs Glasplättchen mit Glyzerin verkittet und dann ihre Durchlässigkeit bestimmt. Sie ergab sich im Mittelwert aus vier unmittelbar hintereinander gemachten Aufnahmenpaaren zu 0,314. Wenn man sie unter Zugrundelegung des mittleren Absorptionsverhältnisses $A = 0,8386$ der einzelnen Plättchen und des bekannten Brechungsindex des Glyzerins berechnet, so erhält man $D = 0,316$.

VI. Absorptionsmessungen.

Um auch Beispiele von Absorptionsmessungen zu geben, habe ich die Absorption von zwei wässrigen Lösungen im Ultraviolett zwischen 400μ und 230μ quantitativ bestimmt, und zwar von einer $\frac{1}{4}$ normalen Kaliumnitratlösung und von

einer Lösung 1:30000 von para-Nitrosodimethylanilin. Die Absorption dieses Farbstoffes im Ultraviolett ist insofern von besonderem Interesse, als er einen gewöhnlichen Bestandteil der Ultraviolettfilter darstellt.¹⁾

Die nachstehende Tabelle I enthält die auf die Absorption der Kaliumnitratlösung bezüglichen Zahlen. Spalte 1 gibt die Wellenlänge an, Spalte 2 das gefundene Absorptionsverhältnis, d. h. den Bruchteil des eintretenden Lichtes, der von der zu den Messungen verwendeten 0,915 cm dicken Schicht des Absorbens durchgelassen wurde, Spalte 3 den Absorptionskoeffizienten, also das Absorptionsverhältnis einer Schicht von der Dicke 1, Spalte 4 die Absorptionskonstante, Spalte 5 die dekadische Absorptionskonstante, die natürlich nichts anderes ist, als das $(\log e)$ -fache der gewöhnlichen (natürlichen) Absorptionskonstante.

Tabelle I.

1	2	3	4	5
λ	A	a	k	α
366,5	1,000	1,000	0,000	0,000
346,8	0,977	0,975	0,025	0,011
334,4	0,787	0,770	0,262	0,114
326,2	0,460	0,428	0,849	0,369
313,1	0,069	0,054	2,927	1,269
302,7	0,032	0,023	3,770	1,633
297,0	0,036	0,026	3,612	1,578
290,0	0,063	0,049	3,016	1,308
280,3	0,165	0,140	1,970	0,855
275,1	0,239	0,209	1,565	0,680
269,6	0,350	0,317	1,148	0,498
265,5	0,461	0,429	0,846	0,368
260,3	0,428	0,395	0,928	0,403
257,7	0,360	0,327	1,117	0,485
254,0	0,157	0,132	2,026	0,879
249,0	< 0,015	< 0,010	> 4,6	> 2,0

Oberhalb 360 $\mu\mu$ unterscheidet sich das Absorptionsverhältnis nicht merklich von 1, deshalb beginnt die Tabelle

1) Vgl. H. Lehmann, Phys. Zeitschr. 11. 1039. 1910.

erst bei $366 \mu\mu$. Bei $249 \mu\mu$ endet sie, weil dort das Absorptionsverhältnis unmeßbar klein wird. Denn es leuchtet ein, daß man mit dem hier behandelten Verfahren nicht mehr messen kann, sobald die durchgelassene Lichtmenge weniger als etwa 2 Proz. der eintretenden beträgt. Man muß dann zu dünneren Schichten greifen, was mir nicht möglich war, da ich nur einen Quarztrog hatte.

Die beiden Diagramme Fig. 14 und Fig. 15 geben das *Absorptionsverhältnis* der Schichtdicke 1 (also die Werte a

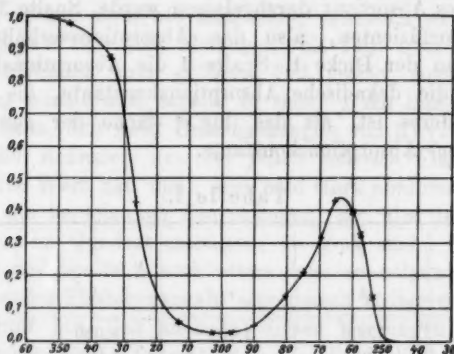


Fig. 14.

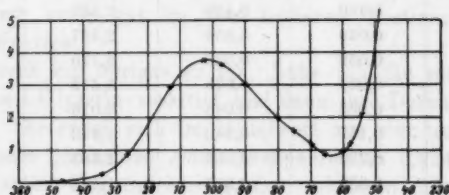


Fig. 15.

der Tabelle) und die *Absorptionskonstante* als Funktion der Wellenlänge. Das Diagramm der Absorptionskoeffizienten ist viel anschaulicher, als das der Absorptionskonstanten, da die beiden Abschnitte, in die irgend eine vertikal durch das Diagramm gezogene Linie von der Kurve zerlegt wird, unmittelbar das Verhältnis der absorbierten zur nicht absorbierten Lichtmenge (für die Schichtdicke 1) veranschaulichen.

Tabelle II.

1	2	3	4	5
λ	A	a	k	α
390,0	< 0,02	< 0,014	> 4,5	> 1,96
366,5	0,456	0,424	0,858	0,372
346,8	0,716	0,694	0,866	0,159
334,4	0,721	0,699	0,858	0,155
326,2	0,698	0,675	0,893	0,171
313,1	0,597	0,569	0,565	0,245
302,7	0,523	0,492	0,719	0,308
297,0	0,457	0,425	0,856	0,372
290,0	0,282	0,251	1,385	0,601
280,3	0,206	0,178	1,726	0,749
269,6	0,204	0,176	1,739	0,754
265,5	0,230	0,201	1,608	0,698
254,0	0,379	0,347	1,059	0,460
249,0	0,426	0,394	0,934	0,405
241,0	0,332	0,300	1,207	0,523
229,0	0,281	0,250	1,389	0,602

Die Tabelle II gibt die Zahlenwerte für die Absorption des para-Nitrosodimethylanilins in wässriger Lösung 1:30000. Die Lösung hat ungefähr die Farbe eines Weißweines und läßt im roten und gelben Gebiet des sichtbaren Spektrums in

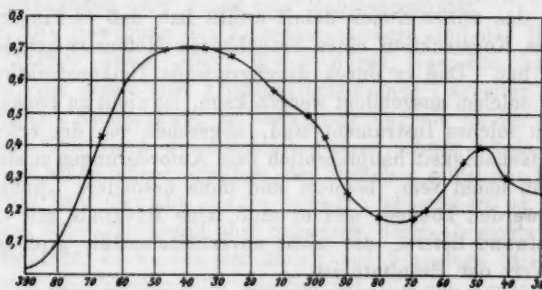


Fig. 16.

einer Schicht von 1 cm im Mittel schätzungsweise mehr als die Hälfte des eintretenden Lichtes durch. Bei $\lambda = 480 \mu\mu$ nimmt die Absorption sehr rasch zu, und in dem Intervall

von $470\ \mu\mu$ — $395\ \mu\mu$ wird erheblich weniger als 1 Proz. durchgelassen. Die Tabelle beginnt deshalb erst bei $390\ \mu\mu$.

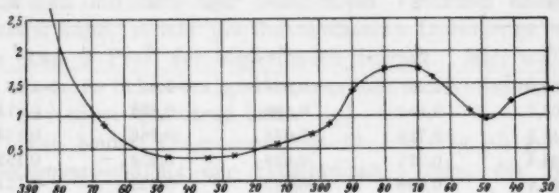


Fig. 17.

Das Diagramm Fig. 16 gibt wieder den Absorptionskoeffizienten und das Diagramm Fig. 17 die Absorptionskonstante der Lösung in dem Intervall von 390 — $229\ \mu\mu$.

V. Vorschläge zur konstruktiven Verbesserung des Apparates.

Obgleich der beschriebene Apparat nach den bisherigen Ausführungen tatsächlich Absorptionsmessungen von ziemlicher Genauigkeit in dem photographisch wirksamen Teil des Spektrums gestattet, so ist er doch in seiner jetzigen Form noch weit entfernt, ein praktisch brauchbares Meßinstrument für Untersuchungen in größerem Umfange zu sein. Vielmehr ist der jetzige Apparat als ein ganz primitives Provisorium anzusehen, das seinen Zweck damit erfüllt hat, daß es Fingerzeige für die Konstruktion eines brauchbaren Meßinstrumentes gegeben hat. Daß er durch durchgreifende Umkonstruktion zu einem solchen ausgebildet werden kann, ist nicht zu bezweifeln. An ein solches Instrument sind, abgesehen von der erforderlichen Genauigkeit, hauptsächlich zwei Anforderungen zu stellen: Es muß leicht sein, bequem und ohne besondere Übung bedient werden können, und es muß seine Resultate mit einem Zeitaufwand liefern, der nicht unverhältnismäßig groß gegen den Wert der Resultate ist.

Man muß also bei der Konstruktion darauf bedacht sein, daß dem Beobachter jede Arbeit, die der Apparat eben-
sogut machen kann, abgenommen wird. Ein Beispiel wird dies klar machen. Beim Übergang zu einer anderen Wellenlänge muß man jetzt *fünf* gesonderte Einstellungen vornehmen,

von denen für zwei die Werte erst aus den Eichungskurven zu entnehmen sind: Die Einstellung des Spektralapparates mit Hilfe des Teilkreises, die Einstellungen der Entfernungen der zwei Paare von Beleuchtungslinsen und der Lichtquelle vom Spalt und die Einstellung des Abstandes der Spaltteile voneinander. Es ist aber bei geeigneter Konstruktion gar nicht schwierig, mit der ersten Einstellung, nämlich der des Spektralapparates, alle übrigen zu kuppeln, so daß man an Stelle der angeführten fünf einzelnen Einstellungen nur die nach dem Teilkreis auszuführen hat und überdies sicher ist, daß nichts vergessen worden ist.

1. Gesamtanordnung.

Zunächst würde es zweckmäßig sein, den Blechkasten *K* (Abb. 2 und 3 der Tafel), der jetzt an seinem hinteren Ende den Kassettenschieber trägt, fest auf einer massiven Grundplatte zu montieren, auf der gleichzeitig der Bewegungsmechanismus für Schieber und Blende angebracht wird. Zur Einstellung der Wellenlänge würde man dann das Kollimatorrohr mit dem Beleuchtungssystem um das Prisma schwenken. Mit dieser Anordnung erzielt man zwei Vorteile:

1. Die Kuppelung der oben angeführten fünf Einstellungen läßt sich in relativ einfacher Weise erreichen, sei es durch Schlitzführungen oder durch eine Hebelanordnung.

2. Die Bewegung des Kassettenschiebers und der Blende kann anstatt durch einen Motor durch Gewichte bewirkt werden, die gegen eine Flüssigkeitsdämpfung¹⁾ arbeiten. Bei der jetzigen Konstruktion ist dies nicht möglich, da der ganze drehbare Teil durch die Gewichte viel zu schwer würde, und weil, wie schon früher erwähnt, der Schieber selbst aus Rücksicht auf sein Gewicht viel zu schwach konstruiert ist. Die Vorzüge einer Bewegung des Schiebers durch Gewichte sind aber eklatant: es werden der Motor, das Vorgelege, die Umsteuerung, die Kardanwelle, die Spindel, die am Apparat zur Ausschaltung des Motors angebrachten Kontakte und die Zuleitungsdrähte zum Motor und den Kontakten entbehrlich, und

1) Bezüglich der Konstruktion dieser Dämpfungseinrichtung vgl. die Dissertation, ebenso bezüglich weiterer notwendiger Veränderungen.

man bekommt dafür nur zwei Gewichte und einen Dämpfungszylinder. Dabei leistet diese vereinfachte Anordnung mehr, als die bisherige, da die Flüssigkeitsdämpfung die Geschwindigkeit der Schieberbewegung in viel bequemerer Weise innerhalb *weitester Grenzen* zu verändern gestattet, als das Vorgelege, und außerdem bei geeigneter Konstruktion die Bewegung des Schiebers höchst wahrscheinlich außerordentlich gleichmäßig gestalten wird, so daß die Aufnahmen frei von Streifenbildungen werden und daher mit jedem Komparator, auch mit freiem Auge, ausgewertet werden können.

2. Kuppelung.

Die Kuppelung zwischen Blendenbewegung und Schieberbewegung geschieht, wenn man statt des Motors Gewichte verwendet, am sichersten durch irgend eine Hebelanordnung. Von dieser

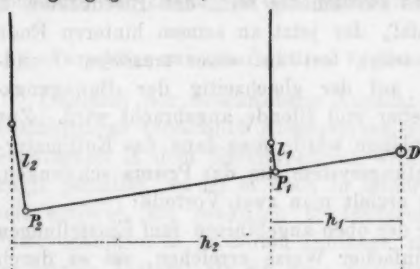


Fig. 18.

muß verlangt werden, daß sie wenig Reibung verursacht und frei von totem Gang ist, worauf ich weiter unten noch zu sprechen

komme. Eine der einfachsten Möglichkeiten ist vielleicht die in Fig. 18 schematisch dargestellte mit einem langen einarmigen Hebel DP_2 , der sich um den festen Punkt D dreht. Wenn die kleinen gelenkig an ihn angebrachten Arme l_1 und l_2 proportional den Abständen DP_1 und DP_2 und den Abständen h_1 und h_2 sind, muß die Bewegung der Blende B genau proportional der des Schiebers S erfolgen.

3. Die Auswertung.

Für die Auswertung sind ebenfalls einige Veränderungen nötig. Die Schieblende muß entweder in bequemer Weise abgenommen oder sehr weit geöffnet werden können. Der Kasten K muß an dem Ende, an dem das Objektiv sitzt, viel weiter gemacht werden, als er jetzt ist, und durch eine sehr

leicht abnehmbare Platte verschlossen sein, die in der Mitte das Objektiv trägt. Diese Platte muß gegen Verdrehung in ihrer Ebene vollständig gesichert sein, da die brechenden Kanten der auf das Objektiv aufgesprengten Prismen immer genau horizontal stehen müssen. Für die Auswertung setzt man an die Stelle dieser Platte mit dem Objektiv eine andere mit einer erheblich größeren Kondensorlinse ein, die das Bild des Stiftes einer an der Grundplatte des Apparates angebrachten seitlich justierbaren Nernstlampe von innen auf den Okularspalt entwirft. Bei der jetzigen Konstruktion kann dieses Bild nur durch die enge Öffnung der Schieblende hindurch entworfen werden und ist deshalb nicht sehr lichtstark. Außerdem muß man jetzt das Objektiv, nachdem man es wieder eingesetzt hat, jedesmal neu justieren.

Die Kuppelung des Schiebers mit der Schieblende muß so gemacht werden, daß der tote Gang verschwindend ist, was nicht schwer zu erreichen ist. Das Verhältnis der Blendenbewegung zur Schieberbewegung darf, wie schon mehrfach erwähnt, nicht veränderlich sein, sondern es muß zu jeder Stellung des Schiebers *eine ganz bestimmte Stellung* der Blende, also ein bestimmtes Schwächungsverhältnis gehören. Dagegen muß für die Auswertung die Kuppelung *lösbar* sein. Die Kassette, die zur Auswertung dient, muß entweder dieselbe, oder sehr genau gleich sein, wie die zur Aufnahme verwendete, und muß so eingerichtet sein, daß sie die Platte mit Federn in eine Ecke drückt, so daß ihre Stellung im Verhältnis zum Schieber bei der Auswertung genau dieselbe ist, wie bei der Aufnahme. Ist dies alles erfüllt, so braucht man nur mit Hilfe des Photometers die Gleichheitsstelle vor den Okularspalt zu bringen, um durch die zugehörige Stellung g des Schiebers das bei der Aufnahme im Moment der Gleichheit vorhanden gewesene Schwächungsverhältnis der Blende und damit die gesuchte Durchlässigkeit D eindeutig gegeben zu haben. Man kann also dann an dem Kassettenschieber eine nach Durchlässigkeiten geeichte Skala anbringen, an der man den Betrag von D nach der Einstellung ohne weiteres abliest, und diese Ablesung ist die *einzigste*, die man im ganzen Verlauf der Messung zu machen hat, während man, wie erinnerlich, bei der Anwendung des Apparates in seiner ursprünglichen

Form die Werte α , β bei der Aufnahme und die Werte a , b , g bei der Auswertung abzulesen und daraus mit Hilfe der vorher bestimmten Werte α_0 , β_0 die Durchlässigkeit nach der Formel

$$D = \frac{\frac{\alpha - \beta_0}{\alpha - g} \cdot \frac{a - b}{\alpha - \beta} - 1}{\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - g} \cdot \frac{a - b}{\alpha - \beta} + 1}$$

zu berechnen hatte.

Bringt man alle die angegebenen Veränderungen und vielleicht noch einige kleine konstruktive Verbesserungen an dem Apparat an, so wird die zum Messen nötige Zeit auf den dritten Teil oder noch weniger reduziert und gleichzeitig die Handhabung des Apparates so vereinfacht, daß jeder Laie ohne weiteres damit arbeiten kann, ebensogut, wie mit einer Rechenmaschine.

VI. Zusammenfassung.

1. Es wurde eine eingehende Prüfung eines von H. Th. Simon angegebenen Spektralphotometers vorgenommen. Die daran vorgefundenen Mängel wurden durch Umkonstruktion zum Teil beseitigt.

2. Es wurde eine zur gleichmäßigen Beleuchtung des Spaltes geeignete Linsenkombination angegeben und ihre Wirkungsweise dargelegt.

3. Es wurde ein verbesserter Komparator zur Auswertung der Platten angegeben, der von der Gleichmäßigkeit der Plattenbewegung bei der Aufnahme unabhängig ist und hohe Empfindlichkeit hat.

4. Es wurden die bei der Anwendung der Methode auftretenden Fehlerquellen eingehend untersucht und experimentell geprüft.

5. Es wurden Vorschläge für eine verbesserte Konstruktion des Apparats gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Prof. H. Th. Simon im Institut für angewandte Elektrizität zu Göttingen ausgeführt. Herrn Prof. Simon bin ich für

das fördernde Interesse, das er dem Fortgang der Arbeit entgegengebracht hat, und für die Freigiebigkeit, mit der er mir alle Hilfsmittel des Instituts zur Verfügung stellte, zu großem Danke verpflichtet.

Ebenso danke ich dem Assistenten, Herrn Dr. Hans Busch, für mannigfache Aufschlüsse, und, last not least, dem Mechaniker des Instituts, Herrn Wilhelm Müller, dessen unermüdlicher Eifer und große Sorgfalt für das Gelingen der Arbeit von Bedeutung war.

(Eingegangen 19. April 1913.)

**7. Über die Konstante
des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes. II;
von S. Valentiner.**

Ich hatte vor einiger Zeit¹⁾ gegen die Gerlachsche Bestimmung²⁾ der Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes Bedenken geäußert, die, wenn sie begründet sind, die Abweichungen des Gerlachschen Wertes von dem Resultat, welches Kurlbaum³⁾ und später ich selbst⁴⁾ nach Kurlbaums Methode erhalten haben, erklären würden. Gerlach⁵⁾ hat darauf in einer ersten Notiz die Bedenken als unbegründet zurückgewiesen und in einer zweiten von neuem Kritik geübt an der Kurlbaumschen Methode der Bestimmung der Strahlungskonstante. Ich sehe mich veranlaßt zunächst zu der ersten Arbeit Gerlachs nachfolgende kurze Bemerkungen zu machen, um meiner Ansicht Ausdruck zu geben, daß die Bedenken durch Gerlachs Ausführungen keineswegs zerstreut sind. Auf Gerlachs zweite Notiz werden Hr. Kurlbaum und ich gemeinsam antworten, da sie uns beide betrifft.

Zunächst führt Gerlach zur Entkräftung meines Einwandes, „daß die Temperatur in der Umgebung des Streifens, speziell vor dem Streifen bei der Messung der Strahlung von 0° um ein geringes niedriger gewesen sein kann, als bei Messung mit dem 100° -Strahler“ an, daß die dadurch gekennzeichnete Fehlerquelle zu einer Abweichung seiner Beobachtungen von dem Gesetz der quadratischen Abhängigkeit der Strahlung von der Entfernung hätte führen müssen, die er nicht hätte konstatieren können. Demgegenüber muß darauf hingewiesen

1) S. Valentiner, Ann. d. Phys. 39. p. 489. 1912.

2) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 38. p. 1. 1912.

3) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 746. 1898.

4) S. Valentiner, Ann. d. Phys. 31. p. 275. 1910.

5) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 40. p. 701. 1913 u. 41. p. 99. 1913.

werden, daß die Genauigkeit der Gerlachschen Beobachtungen wirklich nicht genügt, um einen sicheren Aufschluß über die Abhängigkeit der Strahlung von der Entfernung zu geben. Es unterliegt gar keinem Zweifel, daß mit demselben Recht, mit dem Gerlach in den beiden Figg. 1a und 1b seiner ersten Notiz eine horizontale Mittellinie durch seine Beobachtungen legt, oder mit noch mehr Recht¹⁾ auch eine etwas geneigte Gerade gelegt werden kann, so daß auf eine Abweichung der Beobachtungen von dem genannten Gesetz geschlossen werden könnte. Würde man von den 12 endgültig benutzten Werten (Fig. 1b) die 3 schlechtesten (die $1\frac{1}{2}$ —2 Proz. von dem Gerlachschen Mittelwert abweichen) fortlassen, so wäre eine starke Abhängigkeit der Strahlungskonstante von der Entfernung zu erkennen. Soviel steht fest, daß man aus solchen Beobachtungen nicht die Unabhängigkeit demonstrieren kann.

In dem von Gerlach in seiner Arbeit angegebenen Zahlenmaterial²⁾ glaubte ich möglichenfalls — ich habe mich sehr zurückhaltend darüber geäußert — eine Bestätigung meines Einwandes sehen zu können. Das ist nicht möglich, da Gerlach jetzt für das anfänglich verschieden starke Wandern der Galvanometerausschläge im Fall der Bestrahlung durch den 100°-Strahler und im Fall der elektrischen Heizung des Streifens eine ausreichende Erklärung gegeben hat. Gegen die Berechtigung meines Einwandes sagt die Gerlachsche Erklärung allerdings ebensowenig aus.

Gerlach schreibt und beweist von neuem durch Beobachtungen, die übrigens in seiner Arbeit nicht mitgeteilt waren, daß er mit und ohne Klappe denselben Wert der Strahlungskonstante gefunden habe. Auch das beweist nichts gegen meinen Einwand, da er die Klappe längere Zeit geöffnet halten mußte; ich habe l. c. nicht auf den Nutzen der Klappe als solcher allein hingewiesen, sondern außer einer Klappe die Benutzung der äußerst schnellen Einstellung des Strahlungs-

1) Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Gerlachs Beobachtungen ergibt eine solche; ich gebe natürlich zu, daß infolge der großen Abweichungen der Gerlachschen Werte untereinander diese Berechnungsweise keine Bedeutung hat.

2) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 38. p. 20. 1912. (Fig. 5.)

gleichgewichtetes gefordert zur Vermeidung schwer kontrollierbarer, aber langsamer sich vollziehender Einflüsse durch Konvektion und Leitung. Indessen halte ich auch im Gegensatz zu Gerlachs Ansicht die Verwendung einer Klappe an sich für durchaus nicht umständlicher; denn die Temperaturänderung der Klappe hintanzuhalten, macht doch heutigentages keine Schwierigkeiten mehr, und bei Benutzung einer Klappe kann man auf den 0° -Strahler ganz verzichten; eine größere Anzahl der zum Resultat notwendigen Einzelbeobachtungen, wodurch eine Häufung von Fehlern eintreten könnte, ist also gar nicht erforderlich.

Clausthal, Juni 1913.

(Eingegangen 17. Juni 1913.)

**8. Erwiderung an Hrn. Gerlach
auf die Abhandlung:**

**„Zur Kritik der Strahlungsmessungen. II“¹⁾;
von F. Kurlbaum und S. Valentiner.**

In der zweiten Abhandlung zur Kritik der Strahlungsmessungen teilt Gerlach neue Untersuchungen mit, die sich auf die Unterschiede zwischen Kurlbaums²⁾ und seiner³⁾ Methode beziehen. Er bespricht zuerst den Einfluß ungleichmäßiger Dicke der Bolometerstreifen auf das Resultat, über den zwischen Kurlbaum⁴⁾ und Paschen⁵⁾ eine Diskussion stattgefunden hat. Gerlach kommt zu dem Schluß, daß bei dem von ihm benutzten $1,8\ \mu$ dicken Streifen ein Unterschied zwischen den nach Kurlbaums und nach seiner Methode gewonnen Resultaten nicht besteht, wohl aber bei Benutzung des $0,8\ \mu$ dicken Streifens, der sich von ersterem nur durch bedeutend größere Ungleichmäßigkeit unterscheidet. Kurlbaum zeigte nun schon im Verlauf der genannten Diskussion, daß die von uns benutzten Bolometerstreifen besser sind als die, mit denen Gerlach gearbeitet hat. Die Gerlachsche Nachprüfung zeigt also, daß der Fehler, der durch Ungleichmäßigkeit des Bleches bei unseren Messungen verursacht worden ist, die von den verschiedenen Seiten angegebenen Fehlergrenzen nicht überschritten haben wird. Das steht in gutem Einklang mit der direkten Prüfung Kurlbaums, und Gerlachs nochmaliger Nachweis ist sehr dankenswert. Die Ansicht, daß die große

1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 41. p. 99. 1913.

2) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 746. 1898; S. Valentiner, Ann. d. Phys. 31. p. 275. 1910.

3) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 38. p. 1. 1912.

4) F. Kurlbaum, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. p. 576 und 792. 1912.

5) F. Paschen, Ann. d. Phys. 38. p. 30. 1912; Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. p. 788. 1912.

Differenz in den Resultaten nach Gerlachs und nach Kurlbaums Methode durch Ungleichmäßigkeit des Bolometerstreifens erklärt werden könnte, wird also nun wohl auch von Gerlach und Paschen aufgegeben werden müssen.

Zweitens untersucht Gerlach die gegenseitige Einwirkung der sich bei den Lummer-Kurlbaumschen Bolometern überdeckenden Streifenteile. Seine Messungen führen ihn zu dem Resultat, daß schon in dem sehr ungünstigen Fall, wenn die beiden Bolometerstreifensysteme genau parallel und in einer Entfernung von 2 mm hintereinander angeordnet sind, eine Einwirkung nicht mehr nachweisbar ist, während eine solche bei 0,5 mm Abstand auftritt. Nun sind die Bolometerstreifensysteme, wie sie von Lummer und Kurlbaum und von Valentiner benutzt wurden, 3 mm weit voneinander entfernt, und so auf Schieferrahmen und Hartgummistativen montiert¹⁾, daß die erwärmte Luft zwischen den Streifen ungehindert nach oben abziehen kann. Die Ansicht Gerlachs, daß der Fehler durch diese Einwirkung bei der Kurlbaumschen Anordnung ziemlich beträchtlich sein müsse, beruht also auf einer irrigen Vorstellung über die Apparatur und ist durch Gerlachs Messungen selbst widerlegt.

Was den dritten Punkt der Gerlachschen Betrachtungen anlangt, der sich auf die Art der Ausschläge bei Strahlungs- und bei Stromheizung des Bolometers bezieht, so hat schon Kurlbaum selbst an verschiedenen Stellen auf die Eigentümlichkeit des Bolometerausschlages bei Bestrahlung aufmerksam gemacht.²⁾ Unsere Ansicht hierüber ist folgende: Der Ausschlag des Galvanometers ist verschieden, je nachdem er durch Bestrahlung oder durch Stromwärme hervorgerufen ist, und zwar ist bei gleicher erzeugter Wärmemenge der durch Bestrahlung hervorgerufene kleiner, weil die Stromwärme im Widerstand des Bolometers selbst hervorgerufen wird, während die Strahlungswärme erst durch die schwarze Schicht zum metallischen Widerstand wandern muß. Würde man ein ballistisches Galvanometer wählen, so würde ein großer Fehler

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Wied. Ann. 46. p. 204. 1892.

2) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 61. p. 417. 1897 (speziell p. 418 und 430).

entstehen. Kurlbaum hat diesen Fehler vermieden, indem er dem Magnetnadelsystem eine so starke Luftdämpfung gab, daß es bei einer Ausschlagszeit von 6 Sek. fast ohne Umkehrpunkt in seine Ruhelage ging. Bei einer Größe des Ausschlages von 100 mm ging der Ausschlag nur etwa um 1 mm zurück.

Valentiner hat diesen Fehler gleichfalls vermieden, denn er hat mit einem auf 12 Sek. halbe Schwingungsdauer astasierten, stark gedämpften Panzergalvanometer gearbeitet und sowohl bei Bestrahlung wie bei Stromheizung gut definierte Haltepunkte am Ende der ersten Halbschwingung beobachten können. Bei Bestrahlung folgte diesem „ersten Ausschlag“ bei länger geöffneter Klappe zuweilen ein allmähliches Ansteigen, was von Zustrahlung aus der inzwischen erwärmten Umgebung herrührte. Ein Zweifel über die Wahl des Ausschlages konnte also in diesem Fall gar nicht bestehen.

Eine zweite mögliche Fehlerquelle besteht aber in einer zu langen Bestrahlungszeit. Es ist nur bei einer punktförmigen Strahlungsquelle möglich, diejenige Strahlung allein in den Bolometerraum gelangen zu lassen, welche man messen will. Da aber das vor dem schwarzen Strahler stehende Diaphragma eine erhebliche Dimension haben muß, so sendet man unzweifelhaft in den mit mehreren Diaphragmen unterteilten Bolometerraum Strahlung, welche nicht gemessen werden soll und dem Bolometer indirekt mehr Wärme zuführt, als beabsichtigt ist.

Die erste Fehlerquelle liefert einen zu kleinen, die zweite einen zu großen Wert für die Strahlungskonstante. Wir haben es daher für richtig gehalten, die Bestrahlungszeit klein, aber doch noch so groß zu wählen, daß ein stationärer Zustand erreicht war, nicht aber eine Dauerbestrahlung einzuführen.

Gerlach behauptet ferner im dritten Abschnitt, es könnte eine Fehlerquelle in unseren Messungen darin liegen, daß bei Herstellung der Bolometer Salpetersäure unter die schützende Lackschicht gekrochen sei. Hierdurch könnte Silber von den auf dem Schieferrahmen aufliegenden Platinblechen abgeätzt sein, und diese Fehlerquelle sei nicht untersucht.

Wir haben nur Bolometer benutzt, die auf folgende Weise sorgfältig abgeätzt waren. Das Bolometer tauchte in verdünnte Salpetersäure ein, bei Zimmertemperatur fand eine

Abätzung des Silbers zunächst überhaupt nicht statt. Es wurde nun ein Strom durch die Säure geschickt, wobei die Silberschicht des Bolometers Anode war. Bei Stromschluß sah man deutlich die sofortige Polarisation, etwas später setzte die Auflösung des Silbers mit scharf hervortretender Entwicklung sehr feiner Gasbläschen ein. Diese Gasentwicklung hörte nach einer größeren Anzahl von Sekunden plötzlich wieder auf und zeigte deutlich den Moment an, in welchem die 0,01 mm dicke Silberschicht gelöst war. Hierauf wurde das Bolometer sofort aus der Säure genommen und in destilliertes Wasser gestellt. Erst nachdem es eine Reihe von Gefäßen mit destilliertem Wasser durchlaufen hatte, wurde es zum Trocknen aufgestellt. Es gehört also eine größere Anzahl von Sekunden dazu, die Säure 0,01 mm tief in das Silber eindringen zu lassen, in dieser Zeit kann also die Säure auch nicht tiefer unter den Lack eingedrungen sein.

Es ist aber zuzugeben, daß man auch Bolometer herstellen kann, bei denen Silber unter dem Lack abgeätzt wird. Man kann sogar bewirken, daß salpetersaures Silber beim Trocknen der Bolometer auskristallisierend unter dem Lack hervorkriecht.

Es ist natürlich Hrn. Gerlach unbenommen, schlecht abgeätzte Bolometer herzustellen und den Einfluß dieser Fehlerquelle zu untersuchen, das Resultat wird sich vorher sagen lassen. Wir haben es vorgezogen, nur mit sorgfältig hergestellten Bolometern zu arbeiten.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen zu dem vierten Abschnitt der Gerlachschen Ausführungen.

1. Bei der dort gegebenen Zusammenstellung der neueren Bestimmungen der Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes ist Gerlach etwas willkürlich verfahren; der Wert, den Puccianti¹⁾ für den besseren seiner beiden Bestimmungen hält, ist nicht $5,96 \times 10^{-13}$, den Gerlach angibt und der mit Gerlachs Wert gut übereinstimmt, sondern $6,15 \times 10^{-13}$. Man kann den Wert einstweilen ganz weglassen, da die von Puccianti benutzte Methode offenbar noch nicht so weit

1) L. Puccianti, Nuovo Cim. (6) 4. p. 31 u. 322. 1912.

durchgearbeitet ist, daß eine Angabe über die Genauigkeit derselben vom Forscher selbst gemacht werden kann.

2. Im Gegensatz zu den in Valentiners¹⁾ Diskussion über den wahrscheinlichsten Wert der Strahlungskonstante vertretenen Gesichtspunkten hält Gerlach es auf Grund seiner Messungen der Konstante — es sind 12 Bestimmungen, die zu den Werten zwischen 5,69 und $5,93 \times 10^{-13}$ (+2 Proz. wegen mangelnder Schwärze der Aufnahmefläche) führen — für notwendig anzunehmen, daß entweder die Plancksche Theorie einer Abänderung bedarf, oder daß die Bestimmung des Elementarquantums durch Millikan noch sehr fehlerhaft ist. Wir können uns dieser Ansicht Gerlachs nicht anschließen, zumal ein niedrigerer Wert mit der Strahlungstheorie besser übereinstimmt und durch die Arbeit Westphals²⁾ eine neue Bestätigung gefunden hat.

Dann möchten wir schon eher Paschen³⁾ beistimmen, wenn er am Schluß der erwähnten Diskussion mit Kurlbaum sagt: „Man wird doch bei der Schwierigkeit der Messung weitere Bestimmungen abzuwarten haben, ehe man sich ein sicheres Urteil über den Wert dieser wichtigen Konstanten der Strahlung bilden kann.“

Charlottenburg und Clausthal, Juni 1913.

1) S. Valentiner, Ann. d. Phys. 39. p. 489. 1912.

2) W. H. Westphal, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. p. 987. 1912.

3) F. Paschen, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 14. p. 791. 1912.

(Eingegangen 27. Juni 1913.)

9. Berichtigungen zu der Arbeit:

Wasserstoff- und Widerstandsthermometer zwischen 0 und -193° ;

von F. Henning.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

In der genannten Arbeit (Ann. d. Phys. 40. 1913) muß auf p. 648 die Formel für Δ_2 lauten:

$$\Delta_2 = \vartheta_7 - \vartheta' = -\vartheta^2 \left(\frac{a}{\beta} - \frac{b}{\beta^2} \right) + \vartheta^2 \omega \left(a - \frac{2b}{\beta} \right) + \vartheta^3 b \omega^2,$$

die Rechnung ist mit der richtigen Gleichung durchgeführt.

p. 657 unten und folgende Zeilen muß es heißen:

Nernst hat vorgeschlagen, die zu gleichen Temperaturen gehörigen Widerstandsverhältnisse zweier Platinthermometer durch die Beziehung $R' = (R - \lambda)/(1 - \lambda)$ zu verknüpfen, wobei λ eine Konstante bedeutet. Hieraus folgt $t_p' = t_p$, d. h. also die Platintemperatur ist unabhängig von der Platinsorte. Dies Ergebnis, das nur in erster Näherung als richtig betrachtet werden kann, wird bei den vorliegenden Messungen nicht mit genügender Genauigkeit erfüllt.

(Eingegangen 14. Juni 1913.)

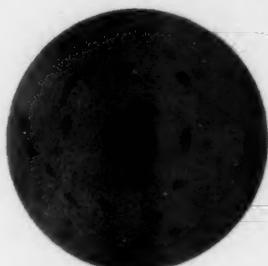


Fig. 1

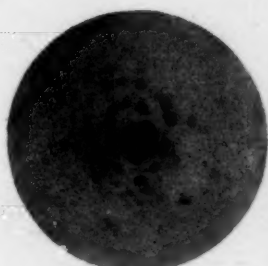


Fig. 2

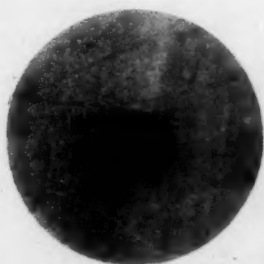


Fig. 3

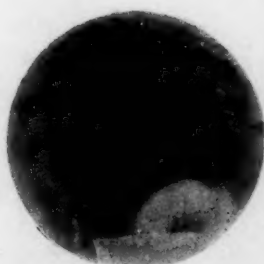
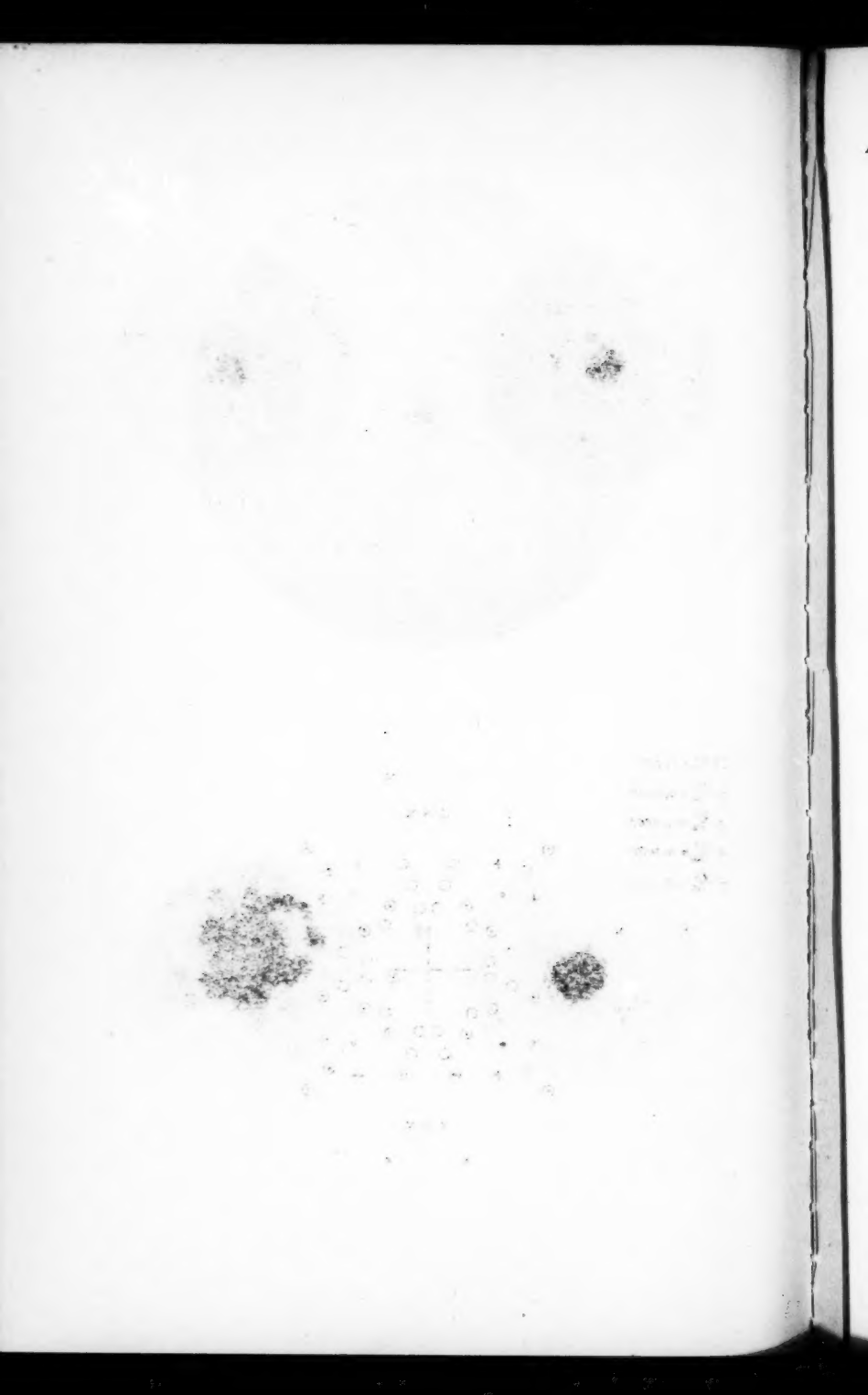


Fig. 4



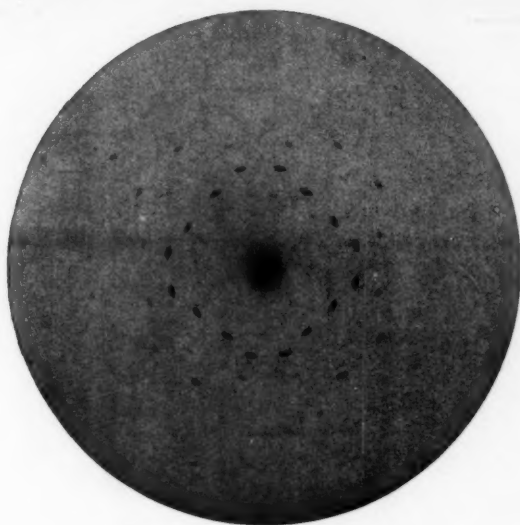


Fig. 5

- $\bigcirc \lambda_{\alpha} = 0,0377$
- $\odot \lambda_{\alpha} = 0,0563$
- $\times \lambda_{\alpha} = 0,0663$
- $\bullet \lambda_{\alpha} = 0,1051$
- $+ \lambda_{\alpha} = 0,143$

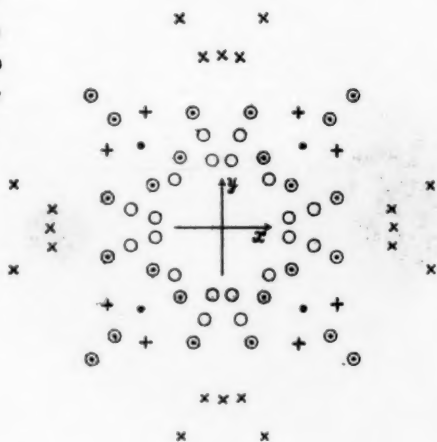
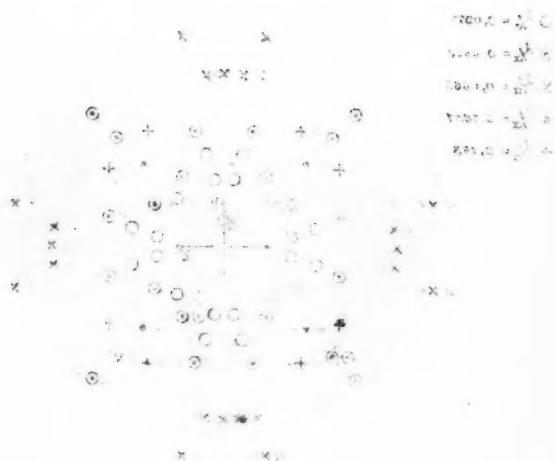


Fig. 6

W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue.



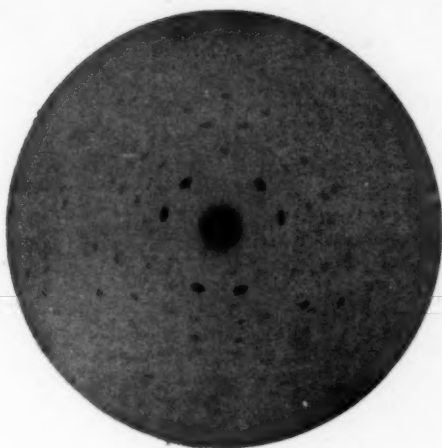


Fig. 7

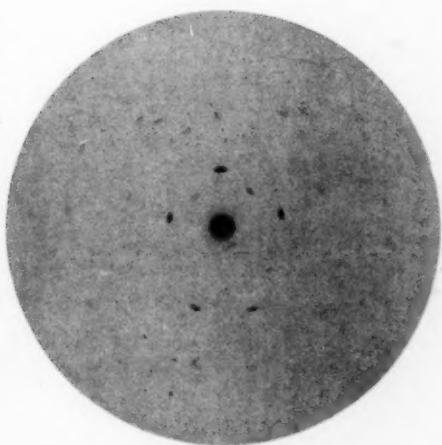


Fig. 8

W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue.

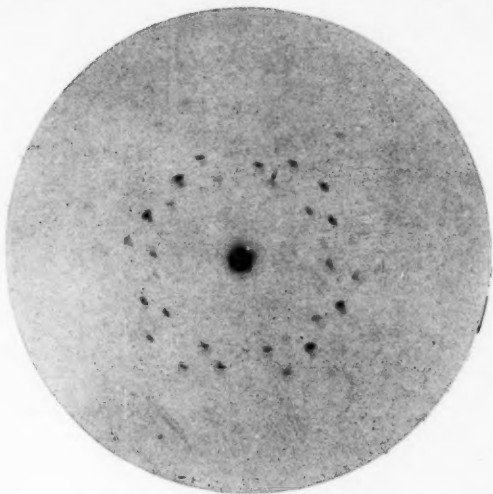


Fig. 9

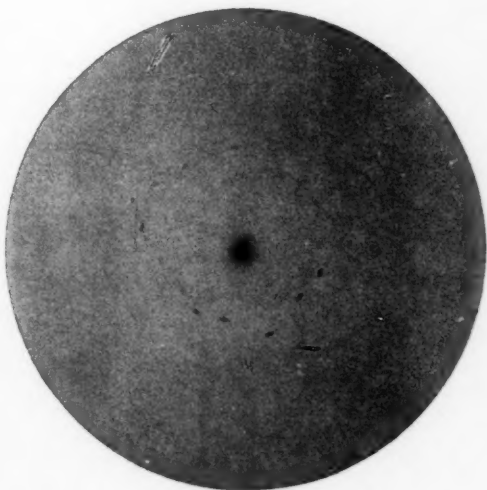


Fig. 10

W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue.

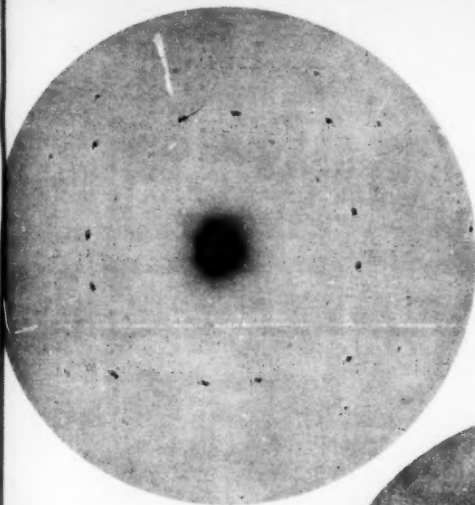


Fig. 1

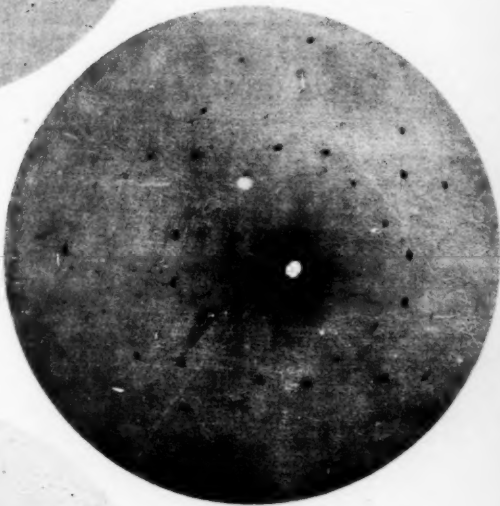


Fig. 2

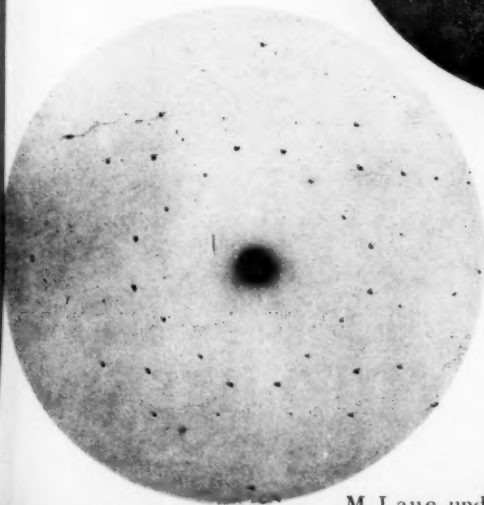
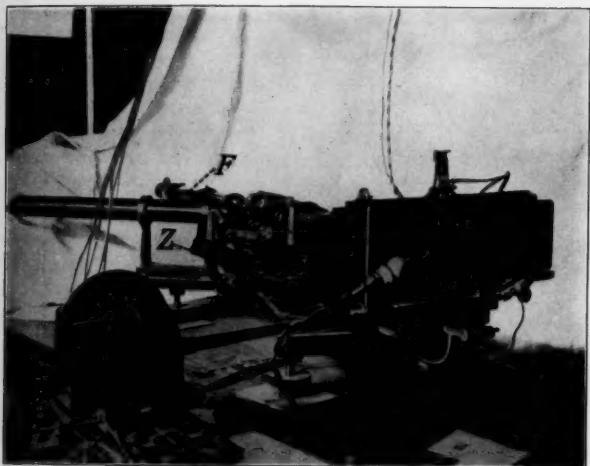
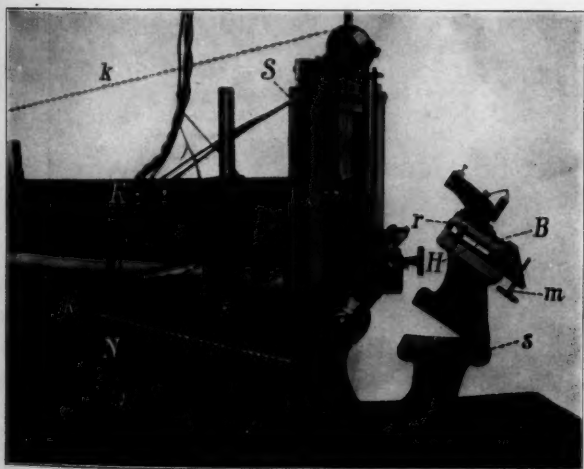


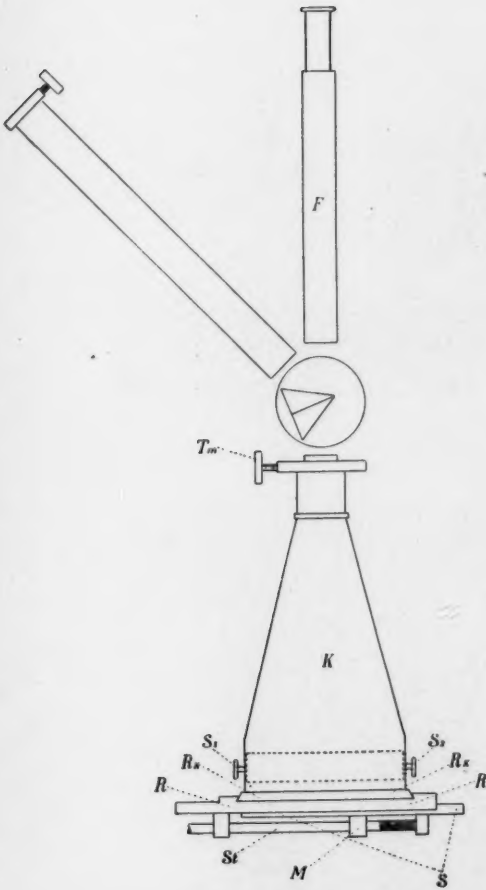
Fig. 3



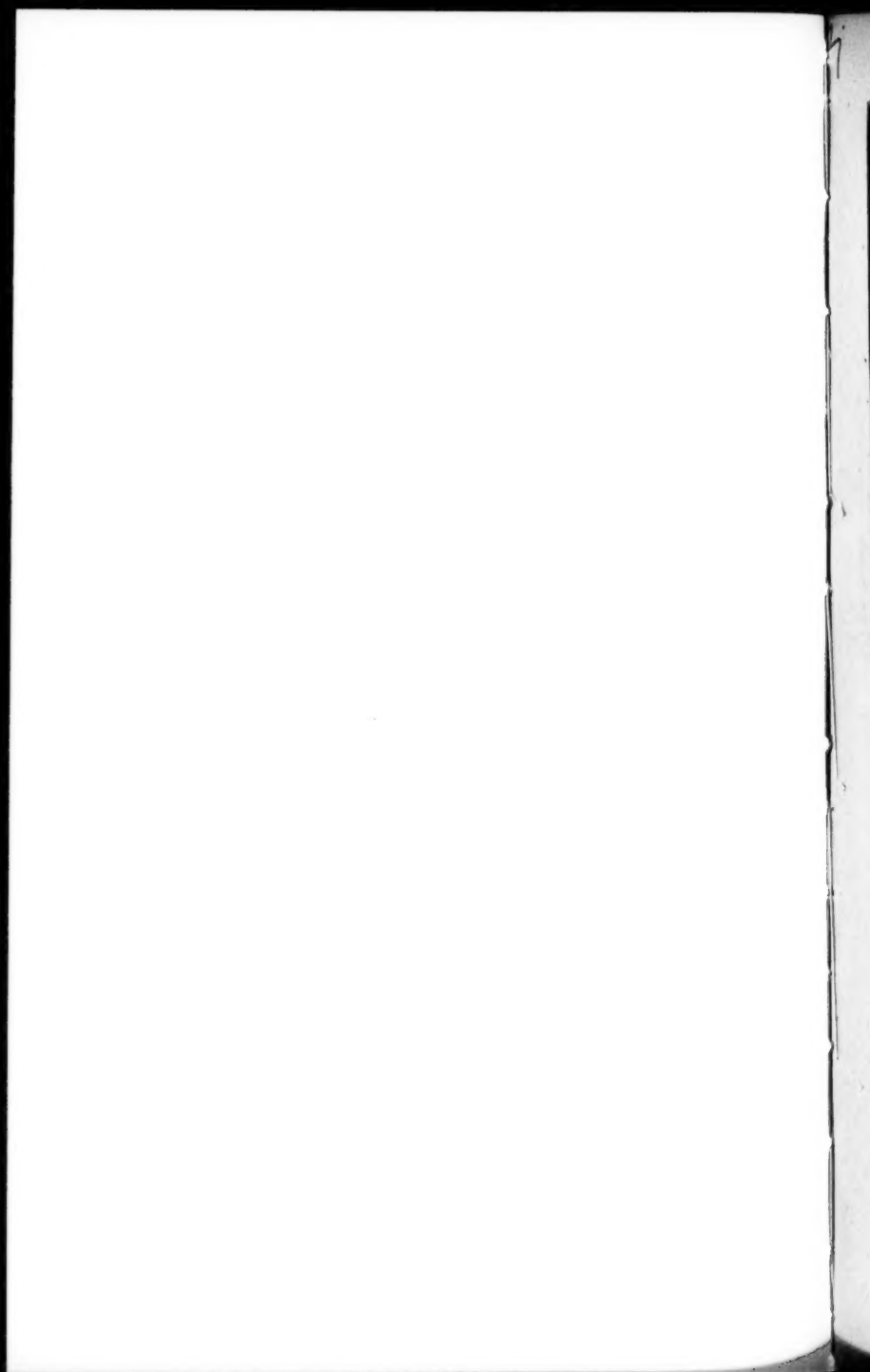
Abbild. 1.



Abbild. 2.



Abbild. 3.



1913.

No. 10.

ANNALEN GENERAL LIBRARY
DER
PHYSIK AUG 25 1913
UNIVERSITY OF MICHIGAN

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 41. Heft 5.

DER GANZEN REIHE 310. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT SECHS TAFELN.



LEIPZIG, 1913.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.
DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 16 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.
(Ausgegeben am 3. August 1913.)*

Inhalt.

	Seite
1. P. Debye und A. Sommerfeld. Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkt des Wirkungsquantums	873
2. Fritz Mayer. Über die Zerstreuung der α -Strahlen	931
3. W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue. Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. (Hierzu Taf. I–IV, Figg. 1–10.)	971
4. M. Laue. Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen. (Hierzu Taf. II, Figg. 5 u. 6.)	989
5. M. Laue und F. Tank. Die Gestalt der Interferenzpunkte bei den Röntgenstrahlinterferenzen. (Hierzu Taf. V.)	1003
6. Franz Peter Defregger. Über ein von H. Th. Simon angegebenes Spektralphotometer für Ultraviolett. (Hierzu Taf. VI, Figg. 1–3.)	1012
7. S. Valentiner. Über die Konstante des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes. II	1056
8. F. Kurlbaum und S. Valentiner. Erwiderung an Hrn. Gerlach auf die Abhandlung: „Zur Kritik der Strahlungsmessungen. II“	1059
9. F. Henning. Berichtigungen zu der Arbeit: Wasserstoff- und Widerstandsthermometer zwischen 0 und -193°	1064

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

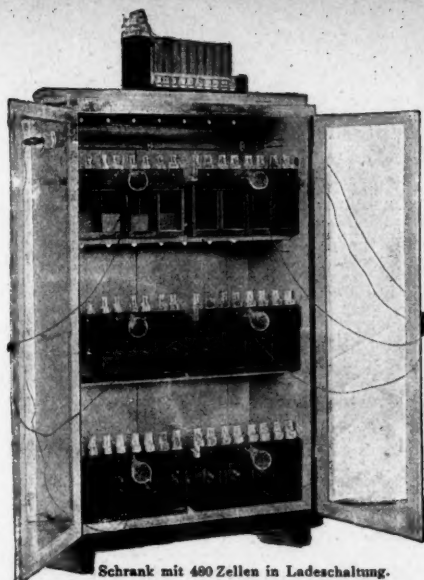
Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Schrank mit 480 Zellen in Ladeschaltung.

Hochspannungs- Akkumulatoren

nach Prof. Zehnder
(Ann. d. Phys. 49. p.
549. 1893; 60. p. 47.
1897).

Beste Isolation jeder
einzelnen Zelle von
Erde.

Leichte Auswechsel-
barkeit der Platten.
Übersichtliche Anord-
nung.

Billige Anschaffungs-
kosten.

Geringer Raumbedarf.

Illustrierte Preisliste
zu Diensten.

FR. KLINGELFUSS & Co., Basel.

Elektrometer nach

Prof. H. W. Schmidt für
**Laboratorium und
Reise**

Zur Messung des Radiumgehaltes von Quellen
und festen Körpern.

Radiumnormallösung

zum Eichn von Elektrometern
nach Prof. H. W. Schmidt



**Spindler & Hoyer
Göttingen**

Prospekte gratis

Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

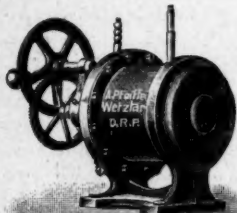
Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Größte Spezial-Fabrik für Luftpumpen
zu wissenschaftlichen Zwecken.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

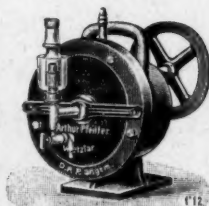
System Pfeiffer, D. R. P.

System Gaede, D. R. P.
angemeldet



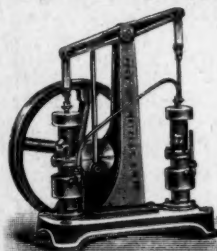
Hochvakuum-
Apparate
zur
Demonstration
und zu
wissenschaftlichen
Untersuchungen.

Neu-
konstruktionen
nach Angabe.

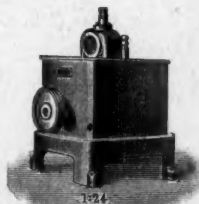


Hochvakuum-Meß-Apparate aller Konstruktionen.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von
Luftpumpen:
Trockene rotierende
Luftpumpen,
Trockene Schieber-
luftpumpen,
Quecksilberluftpumpen
aller Systeme,
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000^m/m
Funkenlänge

Eingetragene



Fabrik-Markte



Funkeninduktor

Induktoren
mit Demon-
strations-
schaltung.
Alle
Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Ateliers E. DUCRETET (F. DUCRETET & E. ROGER) Succ^{rs}.
PARIS — 75 rue Claude-Bernard 75 — PARIS

GRANDS PRIX { PARIS 1889 — Anvers 1894 — Bruxelles 1897 — PARIS 1900
 St. Louis 1904 — Liège 1905 — Milan 1906, Membre du Jury

CABINETS DE PHYSIQUE COMPLETS (Catalogues illustrés)

TÉLÉGRAPHIE SANS FIL: Les procédés de T. S. F. DUCRETET avec dispositifs d'accord, sont maintenant utilisés pour les grandes distances aussi bien en France qu'à l'Etranger. (Tarifs spéciaux à la demande.)

TÉLÉPHONES HAUT-PARLEURS (Brevets Ducretet)

MICROPHONE PUISSANT GAILLARD-DUCRETET

TÉLÉMICROPHONOGRAPHE DUCRETET

Transformateur électrolytique de Faria, redresseur des courants alternatifs.



Die Sartorius-Werke
Analysen-, Präzisions
für alle chemischen
 40 jähr. wissenschaftliche
 sowie eine ganze Reihe
 :: Spezial-Konstruktionen
 findlichkeit und schnellste
 hoher Stabilität der Fabri-

Neueste Spezial-
„SCHNELLWAAGE“.

Unsere Fabrikate sind
 allen einschlägigen

in Göttingen liefern:
wagen und Gewichte
 u. technischen Zwecke.
 u. praktische Erfahrungen,
 patentamtlich geschützter
 garantieren höchste Emp-
 Schwingungsdauer bei ::
 kate. Prospekt P. 7 gratis.

Konstruktion
unerreicht in ihrer Art.
 zu Originalpreisen in
 Geschäften erhältlich.

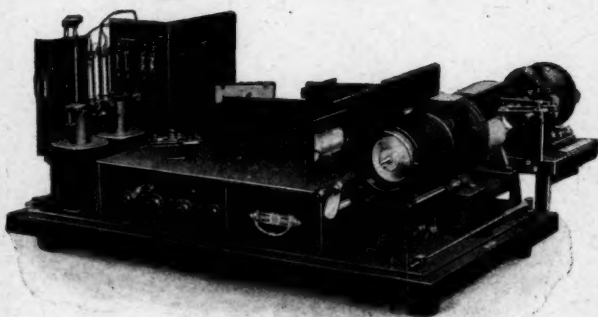
Verein. Werkstätten f. wissensch. Instrumente v. F. Sartorius, A. Becker u. L. Tesdorpf

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Radakowic, Dr. M., Professor in Czernowitz, Über die Be-
dingungen für die Möglichkeit physikalischer Vorgänge.
 (Das Gesetz der Erhaltung der Energie und das Gesetz der
 Vermehrung der Entropie.) Volkstümliche Vorträge ge-
 halten an der Universität Czernowitz. VI, 56 Seiten mit
 5 Figuren im Text. 1913. M. 1.40

Bei dem großen Interesse für die Erscheinungen der Natur dürften die vor-
 liegenden volkstümlichen Vorträge auch für weitere Kreise Interesse haben. Der
 Verfasser hat es verstanden, bei aller Wissenschaftlichkeit sich doch populär
 auszudrücken.

Siemens & Halske A.-G.
Wernerwerk,
Berlin-Nonnendamm.



**Oszillograph
nach Siemens-Blondel**

Verlangen Sie unsere Preisliste 58

E. LEITZ, Optische Werke, WETZLAR

Berlin • Frankfurt a. M. • St. Petersburg • London • New-York



Ultra-kondensor
zur Sichtbarmachung
ultra-mikroskopischer
Teilchen



Ultra-Mikroskop

Metallographische u. Mikrophotographische Einrichtungen
Physikalische Projektionsapparate für Hörsäle u. Schulen
Mikroskope, Luminiszenz-Mikroskope

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

LEHRBUCH DER THERMODYNAMIK

IN IHRER ANWENDUNG AUF DAS
GLEICHGEWICHT VON SYSTEMEN
MIT GASFÖRMIG-FLÜSSIGEN PHASEN

NACH VORLESUNGEN VON

DR. J. D. v. D. WAALS

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM

IN 2 TEILEN BEARBEITET VON

DR. PH. KOHNSTAMM

Erster Teil.

XII, 287 Seiten. 1908. Preis gebunden M. 12.—.

Zweiter Teil.

XVI, 646 Seiten mit 205 Abbildungen im Text.
1912. Preis gebunden M. 24.—.

Physikalische Zeitschrift: Der Inhalt des vorliegenden Werkes deckt sich nach Angabe des Vorwortes von van der Waals im wesentlichen mit dessen Vorlesungen über Thermodynamik, die hauptsächlich den Zweck haben, Resultate eigener Untersuchungen zu geben. Schon daraus geht hervor, daß man es hier mit einem Buche zu tun hat von großer Eigenart, das vielfach — um nicht zu sagen überall — andere Wege geht, als die bei uns üblichen Lehrbücher der Thermodynamik. Der Inhalt gliedert sich folgendermaßen: I. Abschnitt (Erster Hauptsatz und Anwendungen); II. Abschnitt (Zweiter Hauptsatz und Anwendungen); III. Abschnitt (Die Gleichgewichtsprinzipien und Anwendungen); IV. Abschnitt (Thermodynamische Theorie der Kapillarität). Es sei nur ganz allgemein bemerkt, daß in dem Werke hauptsächlich die Methoden der holländischen Schule angewandt werden, die von der Hand eines Meisters dargestellt zu sehen, für alle Fachgenossen von hohem Interesse sein dürfte.



HARTMANN & BRAUN

A.G. FRANKFURT A.M.

Präzisions-Drehspul-Instrumente für Gleichstrom mit Spiegelbogen und neuem Fadenzeiger.

Allerhöchst erreichbare Genauigkeit.
Vollständig unabhängig von d. Temperatur.

Simplex-, Duplex- und Multiplex- Volt- und Ampere-meter für ein, zwei, drei und mehrere Meßbereiche.

Umschaltung auf anderen Meßbereich ohne Stromunterbrechung.

Vollständige Meßkoffer.
Man verlange Liste W 1 und W 2.



Nebenstehend: Millivoltmeter, zur Verwendung als Triplex-Ampereometer, mit jedem Nebenschluss drei Strommessbereiche ergebend.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig.

Soeben erschien:

Die Ergebnisse der Physik während 33 Jahre (1875—1908).

Vier Vorlesungen gehalten an der Universität Calcutta im März 1908.

Von

Arthur Schuster,

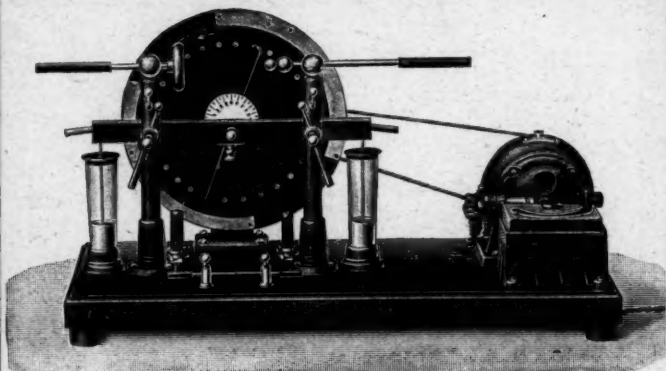
F.R.S., Ph.D. (Heidelberg, Sc. D. (Cantab.), D.Sc. (Manchester u. Calcutta),
Dés Sc. (Genf), Emer. Professor für Physik an der Universität Manchester.

Autorisierte deutsche Ausgabe von Guido Szivessy.

VIII, 156 Seiten mit 12 Figuren im Text. 1913. M. 3,20, geb. M. 4.—.

Diese Vorlesungen enthalten einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse, welche die Physik in den letzten 33 Jahren gemacht hat, bekanntlich eine Epoche, in welcher die physikalischen Anschauungen die tiefgehendsten Umwandlungen erfahren haben und zu deren Darstellung der Verfasser um so berufener war, als er sie als Forscher selbst mit erlebt hat. Bei der Ausarbeitung der Vorträge hat er Ergänzungen hinzugefügt, durch die dem augenblicklichen Stand der Physik Rechnung getragen wird, so daß die kleine Schrift tatsächlich einen Abriß der neuesten Geschichte der Physik und eine Skizze der gegenwärtigen Theorien und Anschauungen darstellt.

Alfred Wehrsen, Berlin 33



Die neuen Starkstrom-Maschinen (Original-Wehrsen-Maschinen)

bedeuten eine wesentliche Vereinfachung, da sie bereits mit
nur zwei Scheiben — einer rotierenden und einer festen —

erstaunlich hohe Leistungen aufweisen,
sie sind die
**leistungsfähigsten und zuverlässigsten
Maschinen der Gegenwart.**

Alfred Wehrsen war der erste, welcher Sektoren für In-
fluenzmaschinen-Scheiben fest in Hartgummi einbetten ließ.
Bereits im Jahre 1903 hat er diese Versuche gemeinsam mit
seiner Hartgummifabrik in den allerverschiedensten Anord-
nungen vorgenommen.

Verlangen Sie in eigenem Interesse die neue Liste No. 22,
die soeben erschienen ist.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890

Präzisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde,
Juli 1889, Januar 1890, Nov.-Dezember 1895.

Normalwiderstände von 100 000—0,00001 Ohm
für genaue Widerstandsvergleichen und
für Strommessungen b. 10 000 Amp. Rheostaten,
Wheatstonesche Brücken, Thomsonsche Doppel-
brücken für alle Meßbereiche mit Stöpsel- od.
Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Aus-
führung. — Kompensationsapparate für genaue
Spannungsmessungen. — Kompensationsapparat
zugleich Wheatstonesche Brücke. — Normalelemente
beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichs-
anstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch
als Präzisionswiderstände beglaubigt — Ver-
kaufslager von Manganin-Draht und Blech
von der Isabellenhütte in Dillenburg.

Illustrierte Preisliste.



Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

— Darmstadt. —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer
Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer
Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate
Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und
Böhmische Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.



Präzisions-Reisszeuge

Präzisions-Sekundenpendel-Uhren

Nickelstahl-Kompensations-Pendel

Grand Prix: Paris 1900, St. Louis 1904,
Lüttich 1905, Brüssel 1910, Turin 1911.

Die echten Rieflerinstrumente sind
mit dem Namen Riefler gestempelt.



SOCIETE GENEVOISE

pour la Construction

D'INSTRUMENTS DE PHYSIQUE ET DE MECANIQUE

Genf. 5 Chemin Gourgas.

Kreis- und Längenteilmaschinen, Comparatoren,
Kathetometer, Mikrometrische Schrauben, Normalmaasse,

Normalmeter

in verschiedenen Längen, aus Nickelstahl (Invar), Nickel, Bronze,
in der H-Form, 5 Meter lang in Invar.

*Höchste Garantie der sauberen Ausführung der
exaktesten Arbeiten.*

Astronomische, optische, elektrische Instrumente.

Vollständige Ausstattung für Universitäten.

Funkentelegraphische Apparate (hohe Frequenz),
nach Tesla, Oudin etc.

☛ Kataloge zur Verfügung. ☛

Interferometer

nach Fabry-Perot und Michelson
(auswechselbar)

Verzeichnis von Interfero-
metern auf Verlangen.

Adam Hilger, Ltd.

75a Camden Road,
London, N.W.

Telegramm-Adresse:
„Sphericity, London“.

Illustrierte Druck-
schriften über Spektro-
skope u. Spektralappa-
rate jeder Art stehen
Interessenten gern zur
Verfügung.



Spektralröhren

neue Form nach Dorn für Quer- und Längsdurchsicht und zur Beobachtung des Anoden- oder Kathodenlichtes. Mit Zylinder Elektroden und allen Gasen und Edelgasen

Infolge neuer Darstellungsmethode mit

Neon

Mark 18,—

Vakuumröhren

Physiko-chemische Apparate
Thermometer
Normal-Meßgeräte



Leipziger Glasinstrumentenfabrik Robert Goetze, Leipzig, Härtelstr. 4

Eigene Füllwerkstätte in Halle a. S., Bergstr. 6

Glastechnisch-mechanische Werkstätten

R. Burger & Co., Berlin N. 4.



Chausseestrasse 8.

Telephon: Amt III 171.

Telegramm-Adr.: Vakuumglas Berlin.

Geldene Medaille 1904 St. Louis
Ehren-Diplom 1906 Mailand

Spezialfabrik

für
physikalische Glasapparate
und Instrumente.

Schwimmer zur
Bestimmung der Temperatur
flüssiger Luft.

Preisliste gratis und franko.

Franz Müller & Co., Frankfurt a. M.,

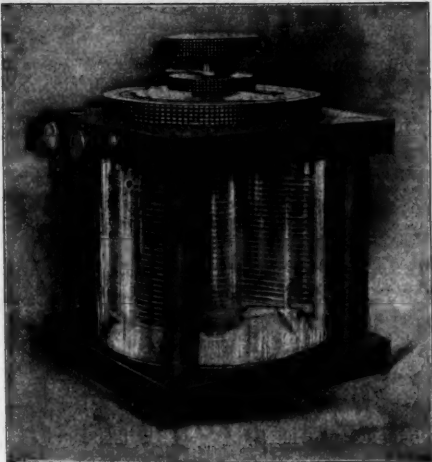
Anfertigung u. Lager chem.-physik.,
bakteriologischer Glasapparate und Utensilien.



Werkstätten für glastechn. Präzisions-Appar., chem. Meßgeräte, Thermometer für Laboratoriums- u. Fabriksgebrauch, Gasuntersuchungsapparate, Wiborghs Schwefel-Bestimmungsapparate, Cadmiumscheiben u. Farbenskalen, Quecksilberpumpen, Vaporimeter, Aräometer, Präzis.-Glashähne, Differential-Manometer n. Dr. König, elektr. Röhren n. Geissler, Crookes, Braun, Röntgen, Goldstein. Apparate nach spez. Zeichnungen.

Kataloge kostenlos

Dr. Erich F. Huth G. m. b. H.
Erdmannshof, Berlin SO. 26.



Drehkondensator Kapazität 2000 cm.

Sämtl. Apparate für drahtl. Telegr. u. Telephonie. Komplette Stationen.
 Preislisten auf Wunsch kostenlos.

Dr. H. Geissler Nachf.
Frz. Müller, Bonna. Rh.

**Fabrik chem. u.
 physik. Apparate.**

Spezialitäten: Elekt. Röhren

Manometer nach Mc.Leod und Kahlbaum

Rowlands Gitter

Quecksilberpumpen

Gasanalysen-Apparate

Elektrolytische Apparate n. Prof. v. Hofmann

Normal-Thermometer

Thermometer nach Beckmann

Thermometer-Sätze nach Gräbe-Anschütz

Präzisions-Meßgeräte und Aräometer " " "

Vacuumthermosäule nach Pfüger

Spectrometer

Kathetometer

Fein geschliffene Hähne

 Kataloge auf Verlangen.

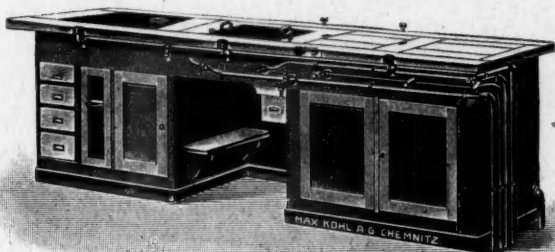


Max Kohl A.G. Chemnitz

≡≡≡ Volleingezahltes Kapital M. 1600 000 ≡≡≡

Hörsaal- und Laboratoriums- Einrichtungen

Viele der größten Schulen und Institute des In-
und Auslandes wurden von uns eingerichtet



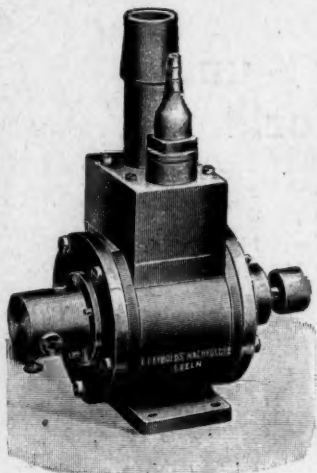
Experimentiertisch für Physik. 3 m lang.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-
Pumpen :: Ölluftpumpen :: Experimentier-
Schalttafeln :: Elektrische Normal-, Meß-
und Regulierwiderstände

☛ Preislisten und Sonderangebote bereitwilligst. ☛
Bei Anfragen bitten wir das Gewünschte genau zu bezeichnen.

E. Leybold's Nachfolger

Cöln a. Rh.



Neu!

Molekular- Luftpumpe

nach
Dr. Gaede.

D. R. P. No. 239 213
und Auslandspatente.

Die neue Pumpe erzielt ohne Quecksilber oder sonstige Sperrflüssigkeit und ohne Trockenmittel die höchsten bisher erreichten Verdünnungen; sie pumpt dabei fünfmal schneller als die rotierende Quecksilberpumpe nach Gaede mit Porzellantrommel D. R. P. No. 202 451.

===== Nähere Mitteilungen auf Verlangen. =====

Warnung! Wir machen darauf aufmerksam, daß wir allein zur Fabrikation und zum Vertrieb der nach den Gaedepatenten hergestellten Pumpen berechtigt sind und daß die Pumpen nur direkt von uns bezogen werden können.

Alleinige Inseratenannahme durch: **Max Gelsdorf, Eberswalde.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

